

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

На правах рукопису  
УДК 004.942:519.216.3

До захисту допущено  
В.о. завідувача кафедри ММСА  
\_\_\_\_\_ О. Л. Тимошук  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

## Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра зі спеціальності 124 Системний аналіз  
на тему: «Методи регресійного аналізу в задачах прогнозування демографічних процесів»

Виконав:  
студент II курсу, групи КА-72мп  
Лубинець Юрій Миколайович \_\_\_\_\_

Керівник: професор кафедри ММСА,  
д.т.н., професор, Бідюк Петро Іванович \_\_\_\_\_

Рецензент: професор кафедри  
інформаційної безпеки  
КПІ ім. І.Сікорського  
д.т.н., професор Архипов О.Є. \_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних посилань.  
Студент \_\_\_\_\_

Київ  
2018

## РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 121 с., 23 рис., 11 табл., 4 додатки, 13 джерел.

Об'єкт дослідження – показники демографічного стану в Україні.

Предмет дослідження – динаміка зміни народонаселення в Україні.

Одним з вирішальних чинників процвітання будь-якої країни є зростання чисельності її населення. На сьогоднішній день, в багатьох економічно-розвинених країнах світу та в Україні виділяється тенденція до стрімкого зниження чисельності їх жителів. Саме тому демографічна проблема є предметом докладного вивчення вже протягом багатьох років. І ця робота є ще однією спробою дослідити це питання.

Метою даної магістерської дисертації є прогнозування росту народонаселення України.

Формування нової національної стратегії, спрямованої на розвиток людського потенціалу, в поєднанні з несприятливими тенденціями демографічного відтворення населення України зумовлюють актуальність демографічних досліджень.

В ній наведено огляд деяких сучасних математичних методів опису динамічних процесів, а також методів апроксимації та прогнозування.

В ході роботи були розроблені математичні моделі авторегресії динаміки чисельності населення та показників народжуваності, смертності, зареєстрованих шлюбів та розлучень на основі зібраних статистичних даних та за допомогою економетричного пакету EViews.

ДЕМОГРАФІЧНИЙ СТАН, АВТОРЕГРЕСІЯ, РЕГРЕСІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МГВА, НЕЧІТКИЙ ПІДХІД, ПРОГНОЗУВАННЯ.

## ABSTRACT

The explanatory note to the master's thesis: 121 p., 23 fig., 11 tabl., 4 appendices, 13 sources.

The topic: Forecasting of demographic processes in Ukraine

An object of research – indicators of demographic situation in Ukraine.

A subject of research – the dynamics of population change in Ukraine.

One of the most governing factors of the well-being of any country is the growth of its population. For today a demographic situation of many economically developed countries and Ukraine particularly has a tendency to sharp decrease. That is why this problem came into the reason for its in-depth study in the course of many years. And this graduation research is a successive stage of demographic analysis.

The objective of my work is the forecasting of population size in Ukraine. Here are presented the reviews of some contemporary mathematical methods of dynamic processes descriptions, and methods of approximation and forecasting as well.

Formation of a new national strategy for human development, combined with unfavorable demographic trends of population reproduction in Ukraine determine the relevance of demographic research.

On basis of collected statistics and by means of econometric software EViews were created regressive models of population development and increase.

DEMOGRAPHIC SITUATION, AUTOREGRESSION, REGRESSION  
MODELING, GMDH, NON-FISCAL APPROACH, FORECASTING.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ  | 8  |
| ВСТУП   | 9  |
| РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В УКРАЇНІ ТА СВІТІ:<br>СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ | 11 |
| 1.1 Виявлення демографічних проблем в Україні та світі  | 11 |
| 1.1.1 Демографічні проблеми у світі   | 11 |
| 1.1.2 Особливості демографічних процесів в Україні  | 13 |
| 1.2 Мета, значення та сутність першого Всеукраїнського перепису населення 2001 року           | 17 |
| 1.3 Оцінка сучасного демографічного стану в Україні   | 32 |
| 1.3.1 Динаміка чисельності та складу населення України  | 32 |
| 1.3.2 Густота та розміщення населення   | 35 |
| 1.3.3 Особливості міграційних процесів  | 36 |
| 1.4 Демографічні перспективи України  | 37 |
| 1.4.1 Очікувані тенденції народжуваності та смертності  | 37 |
| 1.4.2 Очікувані тенденції міграцій населення  | 39 |
| 1.4.3 Прогноз чисельності та складу населення   | 41 |
| 1.4.4 Перспективи демографічного старіння   | 42 |
| 1.5 Головні напрямки демографічної політики України   | 43 |
| Висновки  | 49 |
| РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ   | 50 |
| 2.1 Методи побудови математичної моделі   | 50 |
| 2.1.1 Диференційні рівняння   | 50 |
| 2.1.2 Різницеві рівняння  | 52 |
| 2.2 Методи апроксимації та прогнозування  | 57 |
| 2.2.1 Метод найменших квадратів   | 57 |
| 2.2.2 Чіткий МГВА   | 57 |
| 2.2.3 Нечіткий МГВА   | 59 |
| 2.2.4 Прогнозування динаміки процесів за допомогою різницевих рівнянь                         | 63 |
| Висновки  | 76 |
| РОЗДІЛ 3 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ І<br>ПРОГНОЗУВАННЯ ДЕМОГРАФІЧНОГО СТАНУ В УКРАЇНІ      | 78 |
| 3.1 Побудова математичних моделей для основних демографічних показників.                      | 78 |

|   |     |
|---|-----|
|   | 7   |
| 3.1.1 Вхідні дані   | 78  |
| 3.1.2 Модель динаміки чисельності народонаселення   | 78  |
| 3.1.3 Модель динаміки чисельності населення України за показниками народжуваності та смертності                   | 82  |
| 3.1.4. Модель динаміки чисельності народонаселення за показниками зареєстрованих шлюбів та розлучень              | 84  |
| 3.2 Прогнозування чисельності народонаселення України   | 86  |
| 3.2.1 Застосування різних методів для прогнозування динаміки чисельності населення України                        | 86  |
| 3.2.2 Побудова середньострокового прогнозу на 5 років для населення України                                       | 88  |
| 3.2.3 Побудова середньострокового прогнозу для населення України за допомогою тренду                              | 90  |
| 3.2.4 Порівняння результатів застосування методу різницевого рівняння та методу прогнозування за допомогою тренду | 91  |
| Висновки  | 93  |
| РОЗДІЛ 4 СТАРТАП ПРОЕКТ   | 94  |
| 5.1 Опис ідеї проекту   | 94  |
| 5.2 Технологічний аудит ідеї проекту  | 95  |
| 5.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап проекту   | 95  |
| 5.4 Розроблення ринкової стратегії проекту  | 100 |
| 5.5 Розроблення маркетингової програми стартап проекту  | 102 |
| Висновки  | 104 |
| ВИСНОВКИ  | 106 |
| ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ  | 108 |
| Додаток А Динаміка чисельності населення  | 109 |
| Додаток Б Динаміка демографічного розвитку населення  | 111 |
| Додаток В Середня тривалість життя жінок і чоловіків  | 112 |
| Додаток Г Результати застосування різних методів для прогнозування динаміки чисельності народонаселення           | 113 |

## ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

ДР – диференційні рівняння;  
МНК – метод найменших квадратів;  
МГВА – метод групового відсіву аргументів;  
АР(n) – авторегресія n-го порядку;  
АКФ – автокореляційна функція;  
АРКС – авторегресія з ковзним середнім;  
СКП – сума квадратів похибок;  
СеКП – середньоквадратична похибка;  
САП – середня абсолютна похибка;  
САПП – середня абсолютна похибка в процентах;  
ЕЗ – експоненційне згладжування;  
РР – різниці рівняння

## ВСТУП

Моделювання динамічних процесів є важливим завданням з погляду побудови систем прогнозування і більш глибокого вивчення процесів і систем у різних прикладних областях. У цій роботі в якості динамічних процесів розглядаються демографічні процеси, що являються предметом пильного вивчення вже протягом багатьох років. Побудовано математичну модель динаміки чисельності всього населення України та математичні моделі за показниками народжуваності, смертності, зареєстрованих шлюбів та розлучень. Прогнозування здійснюється різними методами, однак на сьогоднішній день немає одного надійного методу, що забезпечував би одержання прогнозів із прийнятною точністю. У роботі використано чотири метода прогнозування.

У розділі 1 ретельно досліджено демографічну ситуацію в Україні та світі, окреслені основні тенденції на майбутнє. Зроблено невеликий екскурс з історії переписів на Україні, в графіках і таблицях приведені найцікавіші результати Першого Всеукраїнського перепису 2001 року та прогноз деяких демографічних показників. Також в розділі охарактеризовано державну політику з цього питання.

У розділі 2 розглянуті основні принципи побудови математичних моделей, зокрема, це методи різницевих та диференційних рівнянь. Як методи апроксимації та прогнозування, в розділі представлені алгоритми чіткого та нечіткого МГВА.

Розділ 3 присвячено побудові математичних моделей та власне прогнозуванню демографічних процесів на Україні. Так, побудовано декілька моделей авторегресії динаміки чисельності всього населення та окремих демографічних показників України, а за статистичними характеристиками зроблено висновок про найбільш адекватні з них. Виконане прогнозування

чисельності населення різними методами та проведено їх порівняння. Зроблено прогноз щодо можливого подальшого росту чи зменшенню кількості жителів України.

Додатки містить таблиці статистичних даних, що використовувалися в роботі.



## РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В УКРАЇНІ ТА СВІТІ: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

### 1.1 Виявлення демографічних проблем в Україні та світі

#### 1.1.1 Демографічні проблеми у світі

Демографічна проблема являє собою сукупність соціально-демографічних проблем сучасності, що зачіпають інтереси всього людства. Найважливіші проблеми народонаселення, які загрожують українським негативними наслідками: стрімке зростання населення, або демографічний вибух, у країнах, що розвиваються, і загроза депопуляції, або демографічна криза, в економічно розвинених країнах. До проблем народонаселення слід віднести також неконтрольовану урбанізацію в країнах, що розвиваються, кризу великих міст у деяких розвинених країнах, стихійну внутрішню й зовнішню міграцію, яка ускладнює політичні відносини між державами.

Нерівномірне зростання населення в різних регіонах супроводжується інтенсивним процесом перерозподілу світового населення між ними. Частка населення економічно розвинених регіонів неухильно знижується (33,1% 1950 р., 27% 1975 р., 20% 2009 р.), тоді як частка регіонів Азії, Африки та Латинської Америки, що розвиваються, відповідно зростає. Важливість даної проблеми полягає в тому, що такий розвиток негативно позначається на міжнародних відносинах. Подолання економічної відсталості регіонів, що розвиваються, необхідне для нормальних відносин між державами і для прогресу людства в цілому.

У країнах Західної Європи, Північної Америки та Японії в 70 — на початку 90-х рр. посилилася тенденція до різкого падіння народжуваності — значно нижче від рівня, який забезпечує просте відтворення населення. В майбутньому це загрожує депопуляцією населення з її негативними соціальними наслідками.

Стрімке зростання населення в країнах Азії, Африки та Латинської Америки, що розвиваються, призводить до подвоєння його чисельності кожні 20-30 років і ускладнює вирішення соціально-економічних проблем.

На сьогоднішній день чисельність населення Землі складає 7,444 млрд. осіб. Протягом XX ст. кількість людей виросла у чотири рази. За оцінками ООН, щодня населення Землі збільшується на чверть мільйона, за рік ця цифра сягає 90 млн., тобто щороку чисельність збільшується на 0,7% (Таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 – Чисельність населення світу (XVI-XX ст.)

| Рік  | Населення,<br>млн. чол. | Рік  | Населення,<br>млн. чол. | Рік  | Населення,<br>млн. чол. |
|------|-------------------------|------|-------------------------|------|-------------------------|
| 1550 | 450                     | 1940 | 2290                    | 1987 | 5000                    |
| 1650 | 550                     | 1950 | 2500                    | 1990 | 5200                    |
| 1800 | 906                     | 1960 | 3000                    | 1993 | 5512                    |
| 1850 | 1170                    | 1970 | 3650                    | 1994 | 5660                    |
| 1900 | 1630                    | 1980 | 4415                    | 1999 | 6000                    |
| 1920 | 1811                    | 1985 | 4814                    | 2000 | 6200                    |

Такою є загальна тенденція. Ці показники зумовлені насамперед збільшенням чисельності в найбільш розвинених регіонах світу - країнах що розвиваються, адже лівова частка зростання - 97% - припадає на Індію (1251,7 млн.), Китай (1368,7 млн.), Пакистан (199,1 млн.), Індонезію (256 млн.), Бангладеш (169 млн.), країни Африки (Нігерія – 181,6 млн.) та Латинської Америки (Бразилія – 204,3 млн.).

Так, експерти вважають, що до 2050 р. в Індії мешкатиме на 100 млн. осіб більше, ніж у Китаї. Щодо розвинених країн, то високий рівень народжуваності зберігається лише в США (321,4 млн.). 80% зростання населення в країні забезпечують іммігранти. Згідно прогнозам, кількість людей в цій країні за наступні 50 років зросте майже на чверть.

Чисельність населення ж в Європі скорочується, незважаючи на імміграцію. Згідно з докладом Комітету по населенню Ради Європи про демографічну ситуацію, сумарне населення країн РЄ у 2010 році складало 740 млн. чол., що на 45 млн. менше, ніж у 2004 році. Зниження чисельності населення відбулося у 17 країнах, головним чином – східноєвропейських. В Литві населення скоротилося з 3,8 млн. (у 1993 році) до 3,4 млн. (у 2010 році); Білорусі, Україні, а також Греції, Італії та Швеції. Ще 5 країн мали нульовий рівень природного приросту населення. І лише дві країни (Турція та Ісландія) мають рівень народжуваності, що є необхідним для простого відтворення населення. Найнижчий показник тривалості життя зафіксовано в Росії (62,5 років у чоловіків та 72 – у жінок), в Україні та Білорусі (63 — у чоловіків та 74 — у жінок). «Найстарішою» країною є Італія, «наймолодшою» — Албанія. Таким чином, на земній кулі населення розміщується вкрай нерівномірно (млн. чол.): Євразія - 4300 (Європа - 800, Азія - 3500); Африка - 800; Північна Америка – 430; Південна Америка – 350; Австралія та Океанія - 26.

#### 1.1.2 Особливості демографічних процесів в Україні

Проведений аналіз сучасної демографічної ситуації, а також її динаміки протягом останніх років свідчить про наявність в Україні поряд із соціально-економічними проблемами глибокої демографічної кризи, більш інертної та практично некерованої, негативні наслідки якої для подальшого розвитку країни важко передбачити.

Статистичні порівняння з іншими країнами свідчать, що за основними показниками природних змін населення - народжуваності, смертності, природного приросту - Україна стоїть не тільки після країн Заходу, але й республік колишнього СРСР. За рівнем народжуваності вона посідає

передостаннє місце серед них та країн Європи, за смертністю населення - 2-е місце серед країн континенту, за рівнем дитячої смертності (8,6 дитини на 1000 новонароджених) її показники входять у першу сумну десятку показників для європейських країн, за очікуваною тривалістю життя (68 років) - 122-е місце у світі, коли ще у 1994 р. посідала 87-е.

Загрозою для перспектив розвитку нації стають обсяги та темпи депопуляції, тобто абсолютного зменшення населення внаслідок перевищення кількості померлих над кількістю народжених. Вона почалася в Україні з 1991 р. і нині таке зменшення становить близько 1 млн. осіб.

Втрачені в Україні традиції багатодітності призвели до того, що у 2013 р. сумарний показник народжуваності, тобто кількість дітей, що може народити кожна жінка упродовж усього репродуктивного періоду свого життя, становив 1,5 дитини на одну жінку (для розширеного відтворення населення необхідно мати 2,2-2,4 дитини). Падіння життєвого рівня, що триває, невирішеність екологічних проблем, загострених наслідками Чорнобильської катастрофи, економічна криза, соціально-психологічний дискомфорт - все це примушує обмежувати розмір сім'ї. Процес зниження народжуваності характерний для багатьох розвинених країн світу, нині це загальна тенденція демографічного розвитку. Але є межа зниження народжуваності, яку не можна переступити, бо за нею процес депопуляції набуває незворотного характеру. Україна сьогодні підійшла до цієї межі.

Крім того, різко зменшилася кількість шлюбів, зростає число розлучених, удівців і особливо удовиць, збільшується частка бездітних і одинокі родин, а це ще більше погіршує демографічні перспективи держави. В Україні постійно зростає рівень смертності населення. Спостерігається особливо висока смертність чоловіків у працездатному віці, яка перевищує смертність жінок в аналогічному віці майже вчетверо. Тільки за рахунок цього фактора Україна втратила у 1969-1993 рр. понад 500 тис. чоловіків у віці від 16 до 50 років.

Відбувається зростання смертності населення від інфекційних та паразитарних хвороб, що є ганебним явищем для цивілізованої країни. Зростає смертність від факторів, спричинених соціальною напругою та військовим конфліктом на сході України. Інтенсифікується вимирання найбільш вразливих груп населення - дітей, жінок, осіб похилого віку. В результаті зниження народжуваності населення країни "старіє".

Головною ознакою сучасної демографічної кризи є те, що в Україні відбуваються негативні зміни не тільки у кількості, але й у якості населення. Під час обстеження стану здоров'я населення виявилось, що рівень загальної захворюваності в Україні - один із найвищих серед європейських країн. Поширюються соціальні хвороби. Так, за рівнем захворюваності алкоголізмом і наркоманією Україна перебуває на 2-му місці серед зазначеної групи країн. Існує тенденція значного погіршення здоров'я нинішніх дітей і підлітків. Лише один з чотирьох-п'яти може вважатися цілком здоровим. Проблема поліпшення здоров'я населення сьогодні перетворилася у проблему його елементарного збереження.

На погіршення основ подальшого відтворення населення України вплинули також негативні зміни в його генофонді, що загрожують якісним виродженням українського народу (Таблиця 1.2).

Таблиця 1. 2. - Основні демографічні показники [8]

|  | 2001    | 2004    | 2007    | 2011    | 2017    |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|
| Загальна чисельність наявного населення на кінець року (тис. осіб) | 48457,1 | 47280,8 | 46446,1 | 45778,5 | 42760,5 |
| Природне скорочення населення (тис. осіб)                          | -369,5  | -334,0  | -373,4  | -161,9  | -193    |
| Кількість народжених (тис.)  | 376,5   | 427,3   | 424,8   | 502,6   | 411,8   |

|  |        |       |        |        |        |
|--|--------|-------|--------|--------|--------|
| осіб)  |        |       |        |        |        |
| Кількість померлих (тис. осіб)                   | 746,0  | 761,3 | 798,2  | 664,5  | 594,8  |
| Кількість померлих дітей у віці до 1 року (осіб) | 4283   | 4026  | 4523   | 4258   | 4474   |
| Кількість шлюбів (тис.)                          | 309,6  | 278,2 | 333,92 | 355,88 | 299,04 |
| Кількість розлучень (тис.)                       | 181,3  | 173,2 | 187,43 | 182,5  | 129,4  |
| Сальдо міграції (тис. осіб)                      | -152,2 | -7,6  | 9,5    | 17,1   | 9,3    |

Цілеспрямоване винищення найосвіченішої, професійно підготовленої частини населення України, її інтелігенції, заможних селян під час політичних репресій та голодоморів 30-40-х років, величезні втрати працездатної частини населення під час другої світової війни, організовані переселення українців до Росії, Казахстану та інших республік колишнього СРСР, зрештою, нинішній відтік інтелекту за кордон, - все це завдало і продовжує завдавати багато в чому непоправної шкоди українській нації.

## 1.2 Мета, значення та сутність першого Всеукраїнського перепису населення 2001 року

Відповідно до резолюції Економічної і Соціальної Ради Організації О'єднаних Націй від 19 липня 1995 року щодо проведення країнами-членами ООН у період 1995-2004 рр. національних переписів населення, 5 грудня 2001 року в Україні відбувся Всеукраїнський перепис населення. Це перший національний перепис населення, оскільки попередній було проведено у 1989 році - напередодні набуття Україною статусу незалежності.

Метою проведення першого Всеукраїнського перепису населення було одержання об'єктивної інформації про докорінні зміни, які відбулися в соціально-економічному житті та устрої незалежної України, створення інформаційної бази демографічних та соціально-економічних даних щодо чисельності населення, його національного, мовного, сімейного складу, розподілу за віком, статтю, громадянством, рівнем освіти, джерелами засобів існування, професійної приналежності, становищем у занятті, міграційною активністю тощо, як по країні в цілому, так і за всіма її адміністративно-територіальними одиницями.

Особливе значення першого Всеукраїнського перепису населення полягало в тому, що він мав у цифровому вимірі віддзеркалити всю гаму відтінків соціально-економічного життя суспільства, зафіксувати для нащадків риси оновленої України, залишити їм, так би мовити, історичну довідку про демосоціальний стан країни на початку розбудови української державності. Крім того, дані перепису були покликані відповісти на численні запитання стосовно перспектив подальшого розвитку нашої країни. А ще цей перепис мав показати світові, що є Україна у загальноєвропейському контексті, як вона виглядає у порівнянні з іншими країнами регіону, яке місце посідає серед них.

Упродовж 2003-2004 років органи державної статистики поетапно оприлюднили узагальнені результати першого Всеукраїнського перепису населення, і в цьому розділі магістерської дисертації наведені вже кінцеві дані, що для зручності подані у вигляді таблиць, діаграм та графіків [8].

Згідно з даними першого Всеукраїнського перепису населення чисельність наявного населення України станом на 5 грудня 2001 року склала 48457,1 тис. осіб. Нині за кількістю жителів наша держава посідає сьоме місце серед усіх європейських країн (після Росії, Німеччини, Туреччини, Великої Британії, Франції та Італії) або п'яте – серед країн, територія яких повністю знаходиться в Європі.

В результаті обопільної дії як інтенсивних (зниження частоти дітонароджень), так і структурних (підвищення частки літніх людей в населенні) чинників в середині ХХ ст. в нашій країні на тлі зростання чисельності населення почалося уповільнення його темпів (Рисунок 1.1). Так, протягом першого післявоєнного міжпереписного періоду (1959–1970 рр.) чисельність населення зросла на 12,6%, протягом другого (1970–1979 рр.) – на 5,6%, третього (1979–1989 рр.) – на 3,9%.



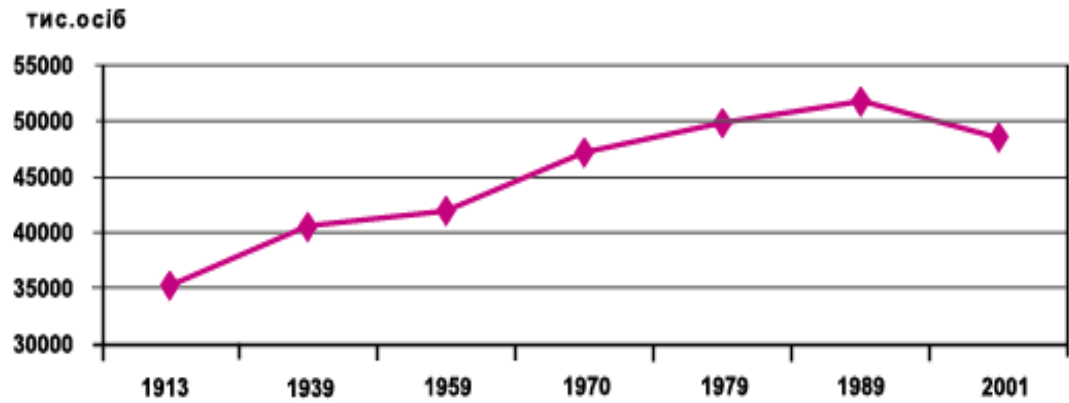


Рисунок 1.1 – Динаміка чисельності наявного населення України в 1913–2001 рр.

Понад 2/3 населення України (67,2%) проживає у міських поселеннях. За період 1939–1989 рр. рівень урбанізації в Україні (питома вага міського населення) зріс майже вдвічі, відмітки у 50% цей показник досяг у 1963 році. Розвиток урбанізації відбувався головним чином завдяки міграційному притоку до міст із сільської місцевості: в 1960–1980-х роках сальдо міграцій сільського населення України становило –150–250 тис., а сальдо міського населення – +150–350 тис. осіб на рік.

Як наслідок, в міських поселеннях спостерігалися більш сприятливі рівні загальних коефіцієнтів природного руху, ніж в сільській місцевості (зокрема, загальний коефіцієнт народжуваності в містах є вищим, ніж в селах, хоча інтенсивність дітонароджень в сільській місцевості явно більша), що також посилювало урбанізацію.

В цілому за 1959–2001 рр. при зростанні загальної чисельності населення країни на 15,7% чисельність міського населення зросла на 70,1%, натомість чисельність сільського – зменшилася на 30,1% (Рисунок 1.2 та Рисунок 1.3).

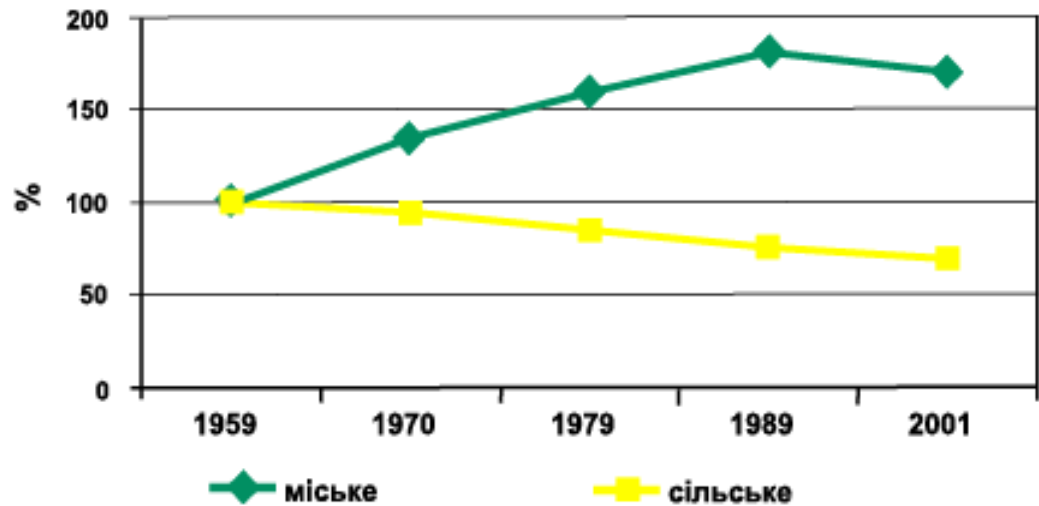


Рисунок 1.2 – Динаміка чисельності міського та сільського населення у 1959–2001 рр.

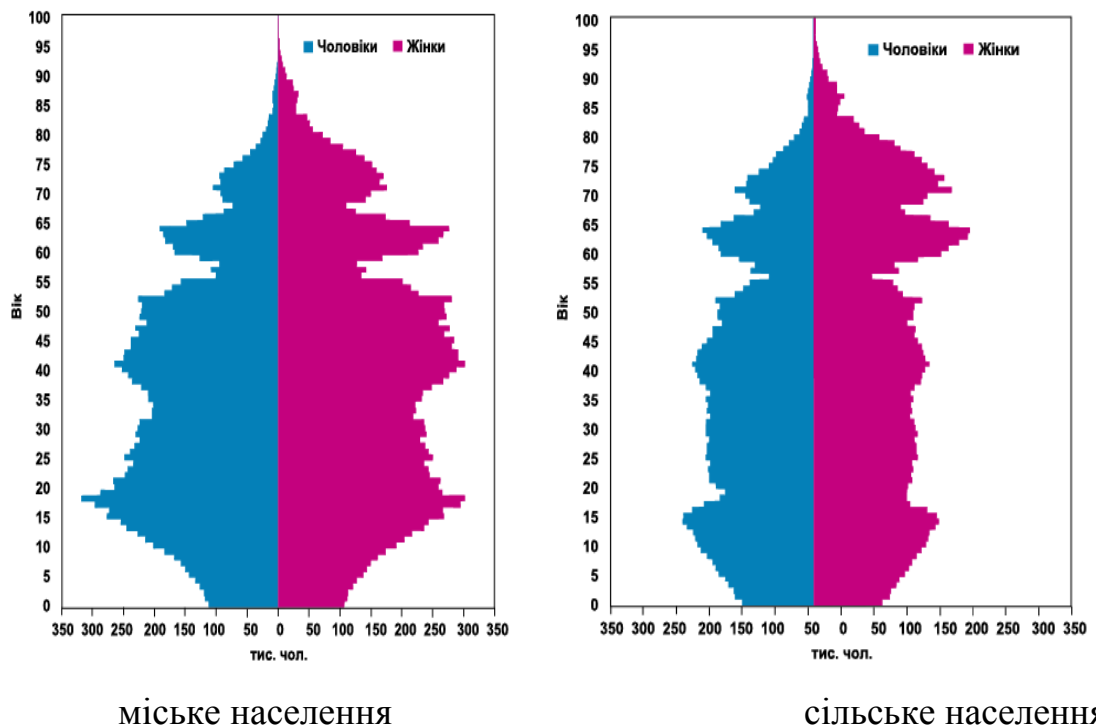


Рисунок 1.3 – Статеві-вікові піраміди міського і сільського населення України за даними Всеукраїнського перепису населення 2001 р.

Статевий склад населення України у досліджуваний період суттєво покращився. У 1959–2001 рр. в містах кількість чоловіків на 1000 жінок змінилась з 827 до 857, в селах – з 774 до 868. Перевага чоловіків у статевому складі населення почала відноситись до старшого віку. У міських поселеннях

чисельна перевага чоловіків над жінками у 2001 р. спостерігалась до віку 24 років, у сільській місцевості – до 49.

Для графічного зображення розподілу населення за віком і статтю найчастіше застосовується статеві-вікова піраміда населення. Її горизонтальні лінії відображають числа народжених, скориговані впливом смертності й міграції. Вплив на статеві-віковий склад справляють такі деструктивні події, як війна, голод і т. ін., що накладає відбиток на форму вікової піраміди. У цьому сенсі вікова піраміда є своєрідним літописом історії країни.

Наочне уявлення про зміну форми статеві-вікової піраміди населення України у 2001 р. порівняно з 1989 дає Рисунок 1. 4.

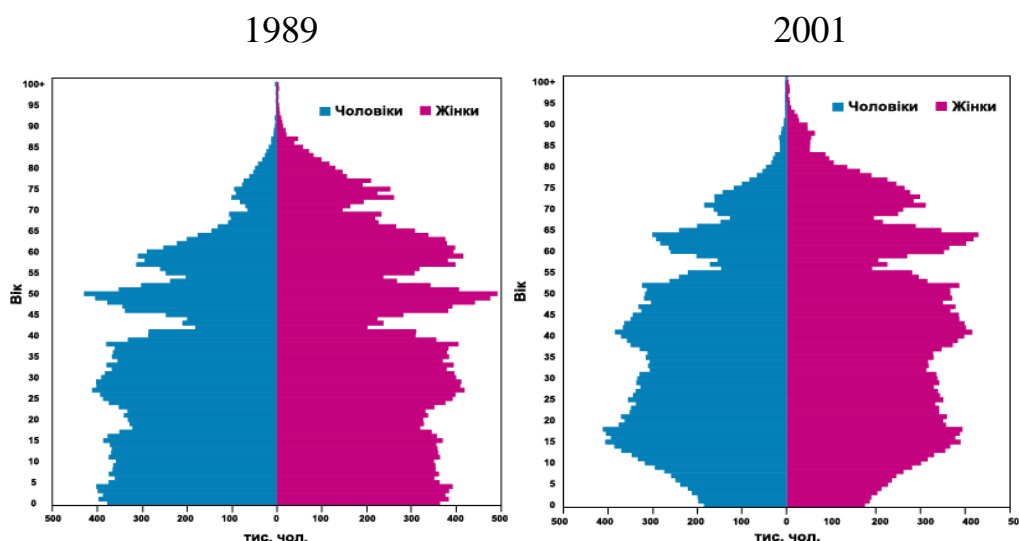


Рисунок 1.4 – Статеві-вікові піраміди населення України за даними переписів населення 1989 і 2001 рр.

Загалом перевищення кількості померлих над кількістю народжених характерно для багатьох країн світу. Зокрема, у 2001 р. в Європі депопуляцією було охоплено 17 країн, нульовий рівень природного приросту населення мали 5 країн. Багато країн перебувають на межі переходу до "нульового приросту". В Україні впродовж 90-х рр. спостерігалось перевищення смертності над народжуваністю. Внаслідок цього чисельність населення скоротилася на 2880,7 тис. осіб.

Інтенсивність природного зменшення сільського населення значно вища, ніж міського. У 2001 р. при загальному природному зменшенні населення України на 7,6% у містах воно становило 6,5, а в селах - 9,8%. У містах більші масштаби природного скорочення характерні для чоловіків, а в селах - для жінок (Рисунок 1.5).



Рисунок 1.5 – Загальні коефіцієнти народжуваності та смертності населення, %

Загальна чисельність народжених зменшилася з 691,0 тис. у 1989 р. до 390,7 тис. у 2002 р. (у містах відповідно з 471,1 тис. до 248,9 тис., у селах - з 219,9 тис. до 141,8 тис.). Загальний коефіцієнт народжуваності знизився з 13,3% у 1989 р. до 8,1% у 2002 р. (у містах з 13,6% до 7,7, в селах - з 12,9% до 9,0).

Переважає більшість дітей (82,6% у 2001 році) народжуються жінками віком до 30 років. Через зниження показників шлюбності населення і поширення незареєстрованих шлюбів зростає частка дітей, народжених жінками, які не перебувають у зареєстрованому шлюбі. У 1989-2001 рр. вона

зросла на 66,7% і становила 18%, причому якщо в 1989-1992 рр. ця частка була вищою в селах, то з 1993 р. - у містах.

Сумарний коефіцієнт народжуваності (кількість дітей, народжених однією жінкою впродовж всього життя) зменшився з 1,9 в 1989 р. до 1,1 у 2001 р. (у т.ч. у міських поселеннях - з 1,8 до 0,9, тобто удвічі, у сільських - з 2,4 до 1,4), як показано на Рисунку 1.6. Більшість шлюбних пар обмежуються однією дитиною.

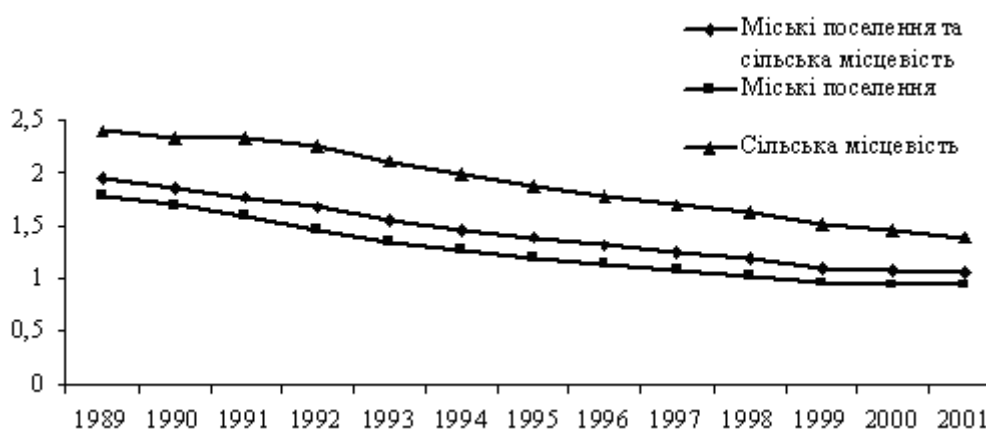


Рисунок 1.6 – Сумарний коефіцієнт народжуваності

За сумарним коефіцієнтом народжуваності області України чітко розподіляються на 3 групи: східні - з найнижчими показниками (коефіцієнт - менше 1 дитини: Донецька, Луганська, Харківська, Дніпропетровська та Запорізька області), західні - з відносно високими показниками (1,3-1,6) та інші області - з коефіцієнтом від 1 до 1,3. Проте у західних областях рівень вичерпної плідності помітно вищий, ніж в інших регіонах України і значно нижчий за межу простого відтворення населення (2,2-2,3). Лише в селах Волинської і Рівненської областей рівень народжуваності ще близький до зазначеної межі і становить 2-2,1. При цьому спостерігається майже зворотна залежність між сумарними коефіцієнтами народжуваності та показниками поширення абортів. Більш детально дані представлені в Рисунку 1.7.



Рисунок 1.7 – Народжуваність в Україні у 2001 рік

Причини падіння народжуваності не можна зводити лише до економічних негараздів, хоча вони, безумовно, відіграють свою роль. Узагальнення існуючих чинників зниження народжуваності дає підстави виокремити такі групи: економічні, соціальні, психологічні, фізіологічні. Задоволення потреби в дітях, у материнстві і батьківстві конкурує з низкою інших потреб, тим простіших, чим нижчий рівень життя. Якщо заможні верстви населення так чи інакше оцінюють витрати часу та грошей на забезпечення майбутнім дітям необхідного фізичного, розумового розвитку та професійної підготовки і можуть порівняти їх із задоволенням власних потреб у розвитку та дозвіллі, то бідні враховують майже елементарні потреби в їжі, одязі, житлі. Не слід очікувати, що з підвищенням рівня життя автоматично зросте і народжуваність. Якби зв'язок був таким простим, не відбулося б істотного скорочення народжуваності в економічно розвинених країнах.

Хоча з 2000 р. відбувся певний злам тенденцій смертності, кількість померлих у 2002 р. все ще вища, ніж у 1989. Вирішальний вплив на ці

процеси здійснює динаміка смертності чоловіків (52,3% загальних змін), у т.ч. городян - 33,8% і селян - 18,5%. Вплив змін смертності жінок виявився значно меншим - 28,4%. Структурні зрушення, головним чином старіння населення, обумовили 19,3% загальних змін.

Аналіз впливу процесу урбанізації на динаміку кількості померлих (Рисунок 1.8) свідчить про помітнішу роль коливань смертності міського населення (вони обумовили 50% загальних змін).

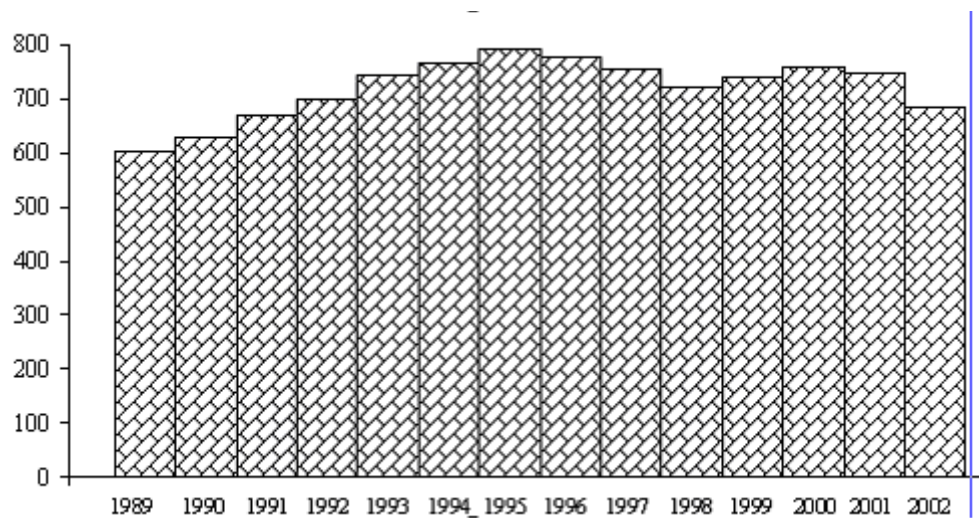


Рисунок 1.8 – Кількість померлих, тис. осіб

За причинами смерті структура смертності має такий вигляд: головні втрати пов'язані з хворобами системи кровообігу, новоутвореннями, зовнішніми причинами, хворобами органів дихання. Проте від кожної з цих причин населення України вмирає на кілька років раніше, ніж населення в економічно розвинених країнах.

Своєрідним індикатором адаптації населення до нових соціально-економічних умов буття є смертність від зовнішніх дій. Її показники збільшилися майже у півтора раза, у т.ч. від самогубств - на третину, а від вбивств - на три чверті. Натомість спостерігається помітне зниження кількості летальних випадків, пов'язаних з транспортом - майже вдвічі, і

пов'язаних з виробництвом - на три чверті. Передусім жертвами зовнішніх дій стають чоловіки (їхня смертність від зазначених причин майже вп'ятеро вища порівняно з жінками) та мешканці міських поселень.

Труднощі процесу адаптації відбилися і на зростанні так званої соціально детермінованої смертності, пов'язаної зі зловживанням алкоголю та тютюну, туберкульозом, ВІЛ\СНІДом та самогубствами (Рисунок 1.9).

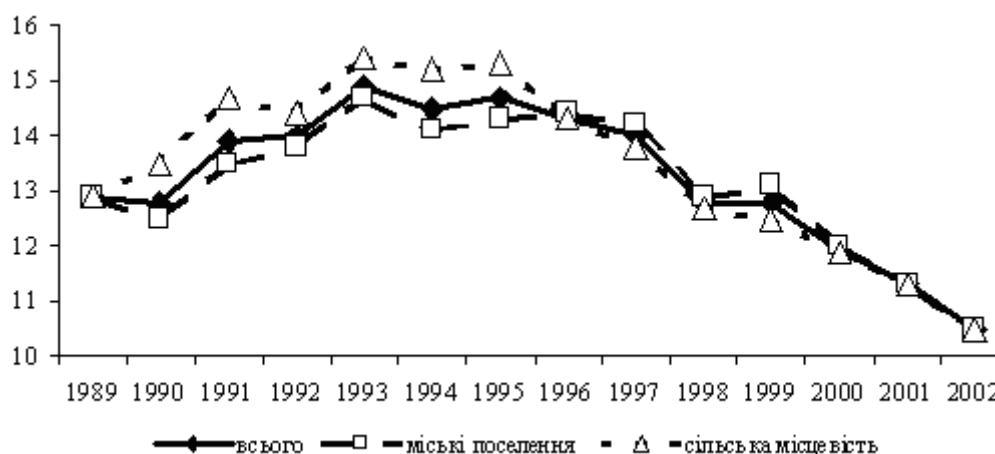


Рисунок 1.9 – Коефіцієнти смертності немовлят, %

Смертність немовлят впродовж другої половини 90-х рр. систематично зменшувалась, у 2002 р. була на 18% нижче, ніж у 1990 р. Основною причиною позитивних змін стало поліпшення охорони здоров'я дитинства.

Найгострішою демографічною проблемою України є неухильне і поки що неподолане зростання смертності населення працездатного віку (Рисунок 1.10). Протягом 1989-2001 рр. ймовірність прожити повністю весь працездатний вік скоротилася з 81% до 74%, у т.ч. для чоловіків з 73% до 63%. Спостерігається майже подвійне зростання надлишкових смертей 40-річних чоловіків від нещасних випадків, отруєнь і травм, від хвороб системи кровообігу, органів дихання і травлення, які зазвичай асоціюються з фізіологічним старінням. Показники смертності цього контингенту є найрухливішими і саме вони визначають динаміку середньої тривалості життя населення.





Рисунок 1.10 – Смертність населення, 2001

Для України характерні істотні розбіжності смертності населення, за якими регіони країни можна об'єднати у три групи. До першої (з найсприятливішими показниками) належать Закарпатська, Івано-Франківська, Львівська, Тернопільська, Хмельницька, Чернівецька області та м. Київ.

Друга група складається переважно з областей центральної частини України: Вінницької, Волинської, Житомирської, Запорізької, Київської, Полтавської, Рівненської, Сумської, Харківської, Черкаської. Сюди ж належить також Автономна Республіка Крим. Для другої групи характерні середні показники смертності та тривалості життя населення.

У більшості областей півдня і сходу України (третя група - Дніпропетровська, Донецька, Кіровоградська, Луганська, Миколаївська, Одеська, Херсонська, Чернігівська області) параметри режиму смертності є вкрай несприятливими. Тут середня очікувана тривалість життя при народженні на 1,47 року нижча, ніж загалом в Україні; відмінності цього

показника за статтю найвідчутніші; а частка тих, хто дожив до старості - найменша. Крім того, у 6 областях третьої групи, за винятком Дніпропетровської та Одеської, зберігається тенденція до зниження тривалості життя при народженні. Із загальної чисельності постійного населення України, згідно з даними перепису 2001 р., 47950,0 тис. осіб (99,4% від загалу) є громадянами України. В нашій державі постійно мешкає 168,0 тис. іноземних громадян (0,35% населення) та 82,6 тис. осіб без громадянства (0,17%), ще 40,4 тис. осіб (0,08% населення) не вказали громадянство. Протягом міжпереписного періоду (1989-2001 роки), незважаючи на загальне зменшення чисельності населення, кількість українців дещо зросла, натомість чисельність етнічних росіян – зменшилася на чверть. З 18 найчисленніших етносів кількісно збільшилися лише шість, вперше відбулося зменшення абсолютної чисельності білорусів, молдован, татар, циган, німців та гагаузів. Євреї, втративши майже 4/5 свого складу, перемістилися з третього місця за чисельністю серед етнічних груп України на десяте [8]. Національний склад населення представлено на Рисунку 1.11.

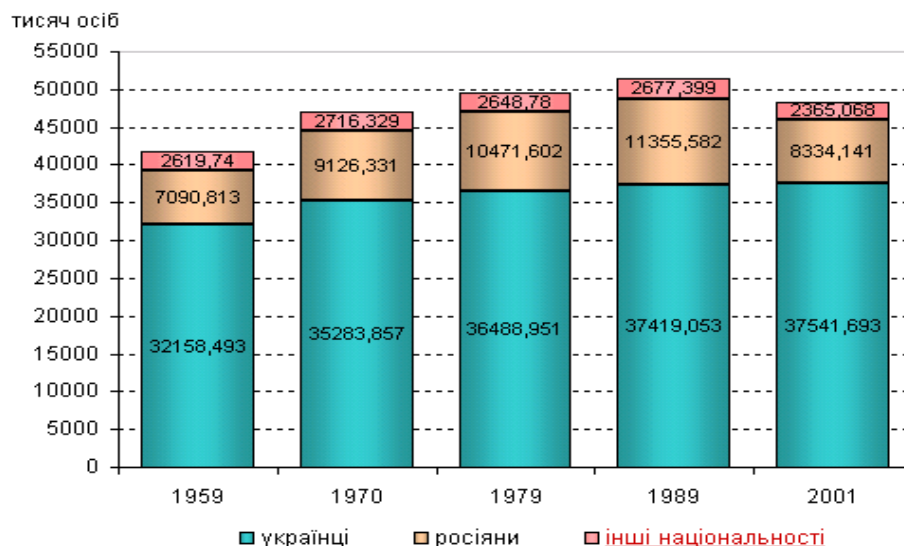


Рисунок 1.11 – Національний склад населення України за даними переписів населення

Вперше після Другої світової війни в Україні відбулося зростання питомої ваги як українців, так і осіб, для яких українська мова є рідною (Рисунок 1.12). Тобто відбувся перелом тенденції русифікації населення, панівної у радянські часи (Рисунок 1.13).

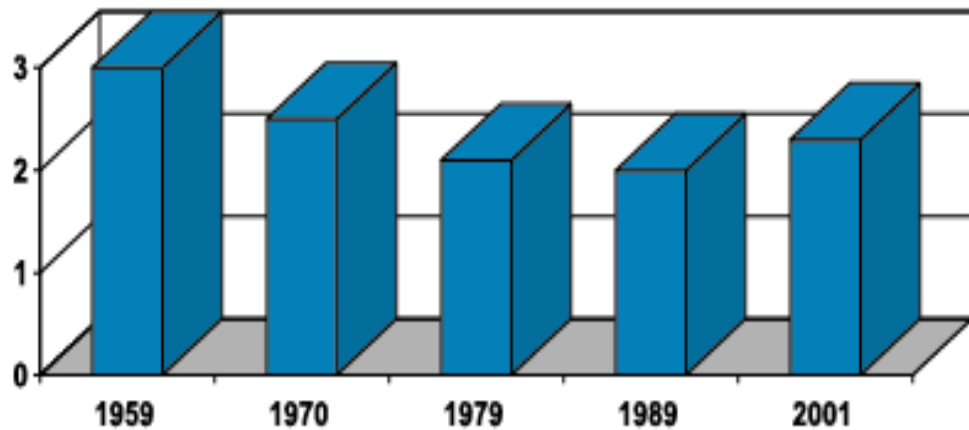


Рисунок 1.12 – Динаміка співвідношення чисельності осіб, які вважають рідною українську та російську мову у 1959-2001 рр.

Слід окремо зупинитися на рівні освіти населення, що традиційно не тільки залишається досить високим, а й надалі продовжує зростати. На сьогоднішній день він є одним з найвищих серед країн Центральної та Східної Європи. За даними Всеукраїнського перепису населення 2001 року 13,7% населення України віком 10 років і старше має повну або базову вищу освіту; 17,7% – неповну вищу; 34,9% – повну загальну середню; 16,0% – базову загальну середню; 14,2% – початкову загальну освіту. Не мають початкової загальної освіти лише 2,6% осіб зазначеного віку (Рисунок 1.13 та Рисунок 1.14).

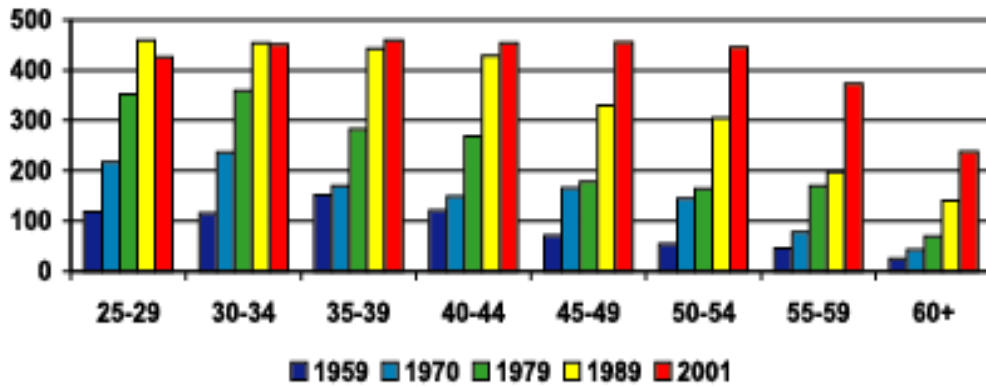


Рисунок 1.13 – Частка осіб з вищою освітою у складі населення відповідного віку, на 1000 осіб

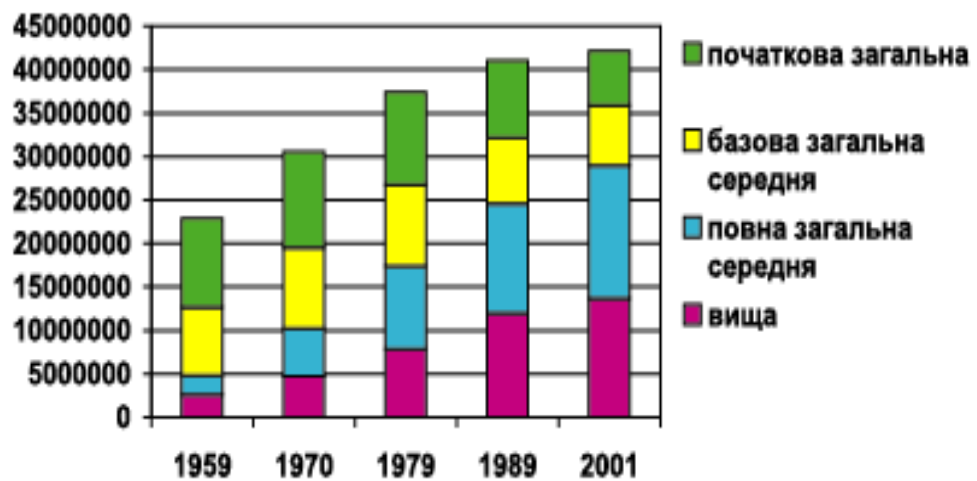


Рисунок 1.14 – Склад населення України за освітою, осіб

Щодо зайнятості населення України, то якісні зрушення в цій сфері тісно пов'язані з процесами формування нової економічної системи. Вони відбивають труднощі подолання занепаду вітчизняного виробництва, його техніко-технологічної модернізації та структурної перебудови, проблеми становлення цивілізованих соціально-трудових відносин у нашій країні. Одним із важливих якісних аспектів зайнятості, що відображає як вищезгадані процеси становлення нової ринкової моделі соціально-економічного розвитку, так і специфіку виробничо-господарської спеціалізації країни та окремих її регіонів, є структура зайнятості населення за видами економічної діяльності. Дані першого Всеукраїнського перепису

населення дають змогу оцінити розподіл зайнятих за видами економічної діяльності та статусом зайнятості (Рисунок 1.15).

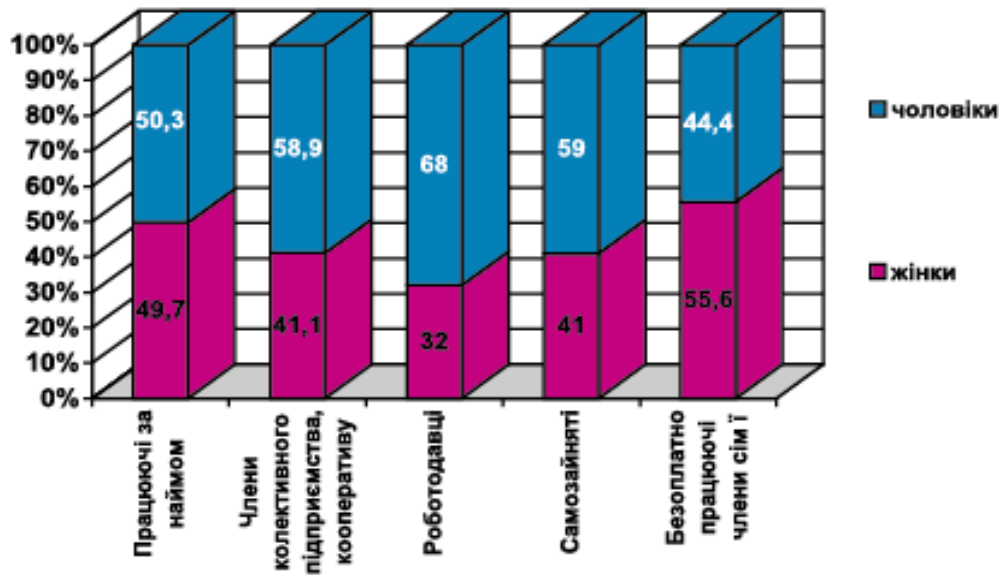


Рисунок 1.15 – Розподіл зайнятого населення України за видами діяльності (станом на 5 грудня 2001 р.)

Повікову зайнятість чоловіків та жінок України у межах працездатного та після працездатного віку відображено на Рисунку 1.16.

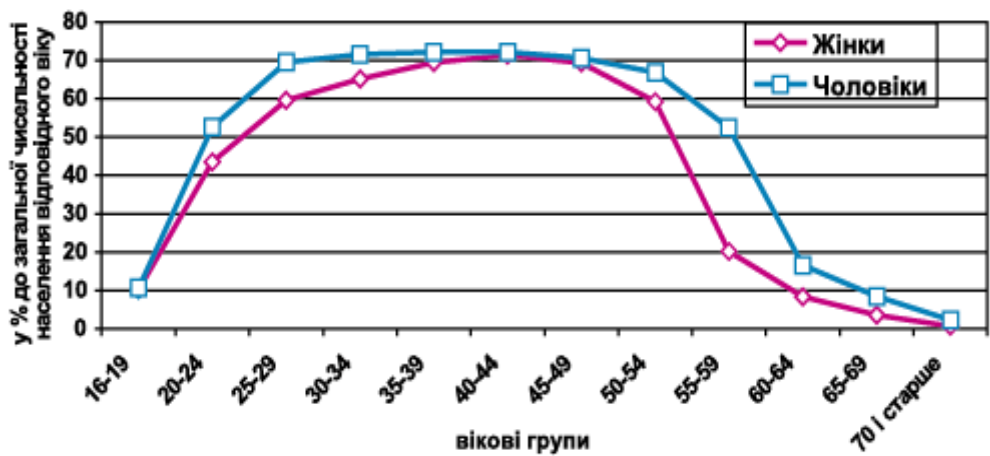


Рисунок 1.16 – Рівень зайнятості жінок і чоловіків України за віковими групами

Розподіл працюючих за наймом в Україні за групами занять має таке процентне відношення:

- законодавчі, вищі державні службовці, керівники – 10;
- професіонали – 14,2;
- фахівці – 15,8;
- технічні службовці – 4,4;
- працівники сфери обслуговування – 11,2;
- кваліфіковані працівники сільського господарства – 2,3;
- кваліфіковані працівники з інструментом – 13,7;
- оператори та складальники устаткування і машин – 17;
- найпростіші професії – 11,2.

Отже, основну групу зайнятого населення складають працюючі за наймом. Але все більшою стає частка приватних підприємців, що працюють в сфері малого чи середнього бізнесу.

Такими є найважливіші показники, отримані на основі зібраних даних про населення при проведенні перепису у 2001 році. Ці дані вже зараз використовуються центрами статистичних досліджень не тільки України, а і багатьох західних країн.

### 1.3 Оцінка сучасного демографічного стану в Україні

#### 1.3.1 Динаміка чисельності та складу населення України

Сучасна демографічна криза в Україні не є суто українським феноменом, її причини обумовлені й тенденціями в зміні способу життя і відтворення населення, притаманний розвинутим країнам, що здійснили основні фази демографічної революції у XX столітті. З ростом цивілізації

зменшується народжуваність, змінюються життєві пріоритети і роль сім'ї взагалі. Але суто українською особливістю є те, що загостренню негативної демографічної динаміки сприяли та продовжують сприяти такі економічні та соціально-політичні явища як криза 1990-х років, анексія півострова Крим у 2014 році, війна на сході України в 2014-2017 роках, що відображається у Додатку А.

Характеризуючи сучасний демографічний розвиток країни можна виділити та охарактеризувати такі основні негативні тенденції: депопуляція в результаті зниження народжуваності та зростання смертності населення; скорочення чисельності дитячого населення, що веде за собою старіння всієї нації; загальне погіршення здоров'я населення, а звідси і надсмертність у працездатному віці; від'ємне сальдо міграцій; соціальні хвороби: ВІЛ/СНІД, наркоманія, алкоголізм.

Фундаментальним чинником загострення демографічної кризи в Україні є падіння народжуваності до критичного рівня. Сучасний рівень народжуваності забезпечує лише половину того, що необхідно для простого відтворення населення, тобто для заміни покоління батьків тією ж чисельністю покоління дітей. Переважно через низький рівень народжуваності Україна за 1993-2007 роки втратила більше 5 млн. населення.

Сумарний показник народжуваності зменшився з 1,9 дитини в 1989 році до 1,1 у 2001. На початок 2013 року сумарний коефіцієнт народжуваності коливається на рівні - 1,5 дитини у розрахунку на одну жінку. Дана інформація знаходиться у Додатку Б.

Процес зниження народжуваності обумовлений цілою низкою причин: економічних, соціальних, психологічних, біологічних. Це є, передусім, наслідком зміни соціального статусу жінки, розширення сфери її поза сімейних інтересів, підвищення рівнів освіти та зайнятості. Змінилося і ставлення до шлюбу як до соціального явища. Показник шлюбності з останніми роками знижується; 28,6% дітей, народжених жінками молодше 20 років, – позашлюбні; 17% сімей з дітьми є неповними.

З загостренням соціально-економічної кризи для багатьох українців бажання стати батьками стоїть поряд із фізичною неможливістю утримувати дитину в майбутньому. Молоді пари просто елементарно не можуть дозволити собі дитину через витрати, які неодмінно виникають при народженні.

З огляду на загальноєвропейські тенденції немає підстав очікувати істотного збільшення сумарних коефіцієнтів народжуваності в Україні у найближчій перспективі. У зв'язку з тим, що відкрите суспільство сприяє орієнтації на західні високі стандарти рівня життя, прагнення до них певний час буде реалізовуватись більшістю населення за рахунок відмови від народження.

На фоні загальнодержавної тенденції до зниження народжуваності неминучим стає старіння нації. Вже тепер на Заході Україна асоціюється з висловом : «Молода країна з нехарактерно старою популяцією». Частка осіб похилого віку становить в цілому по Україні понад 15% від всього населення. Так, на кожну тисячу чоловік працездатного віку припадає, в середньому, 399 непрацездатних осіб пенсійного віку. Подальше ж старіння населення неминуче призведе до виникнення додаткових проблем в економіці та соціальній сфері по утриманню вказаної групи населення працюючими.

В Україні постійно зростає рівень смертності населення. Спостерігається особливо висока смертність чоловіків у працездатному віці, яка перевищує смертність жінок в аналогічному віці майже вчетверо. Дані наведено в Додатку В.

Відбувається зростання смертності населення від інфекційних та паразитарних хвороб, реальною стала в Україні загроза епідемії туберкульозу – більш як 600 тис. її громадян хворіють сьогодні на цю хворобу. За десять місяців 2005 року кількість померлих від туберкульозу становить 9036 осіб, ВІЛ/СНІД – 2607, новоутворень (в тому числі рак) – 68686. А число смертей від хвороб системи кровообігу просто вражає – 366905.



Найвищі в Європі темпи поширення ВІЛ/СНІДу. Особливу тривогу викликає те, що найбільшу частину інфікованих складає молодь, а серед них 15% - діти та підлітки. Втрати ненародженими внаслідок епідемії ВІЛ/СНІДУ у 2015-2025 роках можуть становити 100–200 тис. осіб, що матиме істотний вплив на формування молодих поколінь. Національні та міжнародні експерти вважають, що більш як 550 тис. жителів України на сьогодні вже є ВІЛ-інфікованими. Згідно прогнозів, якщо не вжити запобіжних заходів, то до 2020 року ВІЛ буде інфіковано близько 1,5 млн. українців, і його розповсюдження стане практично неконтрольованим.

Зростає і масштаб соціально небезпечних хвороб - в Україні нараховується 1,2 млн. психічно хворих осіб, 720 тис. хворих на алкоголізм та 56 тис. наркоманів.

Основними причинами втрат здоров'я, зростання смертності та зниження очікуваної тривалості життя є загострення соціально-економічної кризи, низький рівень і несприятливі умови життя та праці значної частини населення, низька ефективність існуючої системи охорони здоров'я, поширеність шкідливих звичок та нехтування нормами здорового способу життя.

### 1.3.2 Густота та розміщення населення

Україна належить до держав з високою густиною населення - 74 осіб на 1 кв. км. Більші показники спостерігаються у східних індустріальних регіонах (у Донецькій 160 особи на 1 км<sup>2</sup>), менші - у північних та південних областях (на Чернігівщині - 32 осіб на 1 км<sup>2</sup>), як показано на Рисунку 1.17.

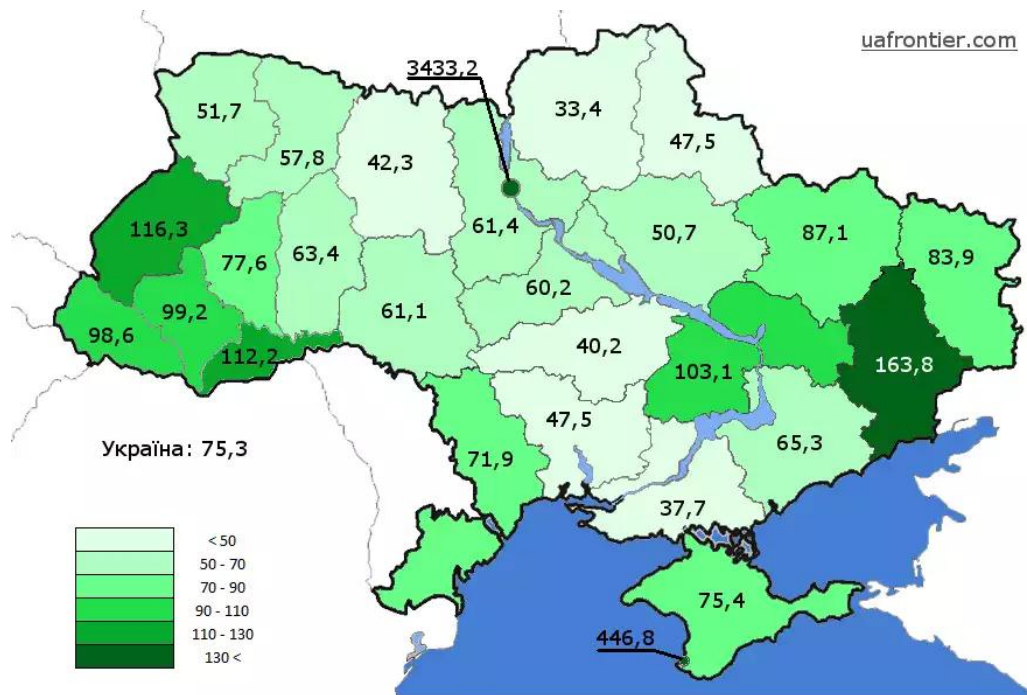


Рисунок 1.17 – Розміщення населення України

В Україні налічується 454 міста, 889 селищ міського типу та 28619 сільських населених пунктів, 46 міст належать до великих, тобто мають чисельність населення 100 тис. чол. і більше. Половина великих міст зосереджена в східних індустріальних регіонах. В Україні нараховується 3 міста-мільйонера - Київ (2907 тис. чол.), Харків (1450 тис. чол.) та Одеса (1010 тис. чол.) і ще 5 крупних міст - Дніпро (986 тис. чол.), Донецьк (945 тис. чол.), Львів (758 тис. чол.), Запоріжжя (756 тис. чол.) та Кривий Ріг (645 тис. чол.)..

### 1.3.3 Особливості міграційних процесів

Суттєво на чисельність постійного населення країни впливають міграційні процеси. Серед таких слід розрізняти насамперед два: переселення на постійне місце проживання (чи на тривалий термін) і трудову міграцію (виїзд задля заробітку). Щодо першого процесу, то у нас ще з 1994 року

зберігається від'ємне сальдо зовнішньої міграції (тобто вибуває з України більше людей, ніж прибуває на постійне місце проживання), причому до 2001 року різниця між вибулими й прибулими була досить значна і перевищувала 150 тис. осіб на рік. Потім відбувається зменшення величини модулю від'ємного сальдо, і у 2004 році перевищення було трохи більше 7 тис. осіб, а починаючи з 2005 року спостерігається мішраційний приріст, який за 2005-2013 роки становив 190,8 тис. осіб.

Кількість трудових емігрантів напряду не впливає на демографічну ситуацію (адже ці люди повертаються), однак опосередкований вплив від неї теж є. Певна частина українських заробітчан помирає за кордоном, до того ж відбувається розрив сімейних зв'язків, що веде до зростання кількості розлучень і відповідно зменшення народжуваності в Україні.

Негативним моментом є і той факт, що в еміграції беруть участь переважно молоді люди, а отже погіршується вікова структура, в Україні зменшується кількість осіб працездатного віку.

## 1.4 Демографічні перспективи України

### 1.4.1 Очікувані тенденції народжуваності та смертності

Загальноєвропейські тенденції народжуваності не дають підстав очікувати істотного збільшення сумарних коефіцієнтів народжуваності впродовж наступних 10-15 років. Втрати ненародженими внаслідок епідемії ВІЛ/СНІДу протягом 2013-2020 рр. можуть становити 100-200 тис (Рисунок 1.18). У зв'язку з тим, що негативні тенденції у динаміці народжуваності посилюються, ці втрати матимуть суттєвий вплив на формування молодих поколінь. Хоча після 2015 р. спостерігається підвищення цього показника до

1,5 у розрахунку на одну жінку, проте це не забезпечує навіть просте заміщення поколінь.

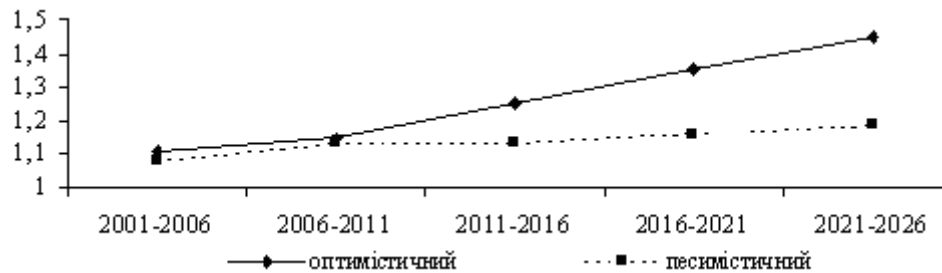


Рисунок 1.18 – Прогноз сумарного коефіцієнта народжуваності

Хвилеподібний характер тенденцій смертності в Україні впродовж принаймні найближчих 25 років, значні резерви зниження смертності у допрацездатних і особливо працездатних вікових групах, адаптація населення до нових соціально-економічних умов, подолання затяжної економічної кризи, успіхи медицини в лікуванні широкого кола захворювань дають підстави розраховувати на зниження ймовірності смерті: прискорене зниження - смертності немовлят (до 7,5-8%) і дітей раннього віку, вельми помірне - жінок 16-60 років (імовірність померти, не доживши до 60 років, для 16-річних дівчат скоротиться до 7-8%) і населення старше 60 років. Найбільші зрушення (як і протягом останніх 50 років) очікуються у смертності чоловіків працездатного віку. Передбачається, що імовірність померти не доживши до 60 років для 16-річних юнаків у 2026 р. становитиме 16-21%. Практично смертність саме цього контингенту визначатиме загальний характер тенденцій смертності та тривалості життя населення України.

Кризовий стан дітородної активності населення даватиметься взнаки протягом життя багатьох поколінь на рівні не лише сім'ї, а й усього суспільства (навіть якщо цей процес і припиниться). Як наслідок, у

майбутньому спостерігатиметься хвилюподібна динаміка чисельності населення і його вікових контингентів, що може перетворитися на відчутну перепону в досягненні сталого розвитку країни. Прогноз середньої очікуваної тривалості життя при народженні. За умови бездіяльності держави у сфері економічного забезпечення відтворення населення, відсутності належного розвитку систем охорони здоров'я, освіти, культури поширюватимуться особливо серед молоді наркоманія, алкоголізм, туберкульоз, ВІЛ/СНІД, венеричні та інші інфекційні захворювання. Смертність впродовж певного періоду коливатиметься у межах сучасного рівня. За таких умов до 2026 р. Україна неістотно перевищить ті показники тривалості життя населення, яких вже було досягнуто у середині 80-х років (Таблиця 1.3).

|  | 2001 | 2006 | 2011 | 2016 | 2021 | 2026 |
|--|------|------|------|------|------|------|
| Коефіцієнт смертності немовлят, ‰                          |      |      |      |      |      |      |
| Оптимістичний варіант                                      | 9,2  | 8,8  | 8,4  | 8,0  | 7,7  | 7,4  |
| Песимістичний варіант                                      | 9,2  | 9,0  | 8,6  | 8,4  | 8,1  | 7,9  |
| Очікувана тривалість життя при народженні, чоловіки, років |      |      |      |      |      |      |
| Оптимістичний варіант                                      | 62,8 | 64,7 | 66,7 | 68,7 | 70,8 | 72,6 |
| Песимістичний варіант                                      | 62,8 | 64,2 | 65,7 | 67,2 | 68,6 | 69,9 |
| Очікувана тривалість життя при народженні, жінки, років    |      |      |      |      |      |      |
| Оптимістичний варіант                                      | 74,0 | 75,0 | 76,1 | 77,1 | 78,1 | 79,0 |
| Песимістичний варіант                                      | 74,0 | 74,6 | 75,3 | 75,9 | 76,6 | 77,1 |
| Імовірність дожити від 16 до 60 років, чоловіки, %         |      |      |      |      |      |      |
| Оптимістичний варіант                                      | 63,3 | 65,6 | 72,1 | 76,1 | 80,4 | 83,9 |
| Песимістичний варіант                                      | 63,3 | 66,5 | 67,0 | 72,9 | 76,0 | 78,6 |
| Імовірність дожити від 16 до 60 років, жінки, %            |      |      |      |      |      |      |
| Оптимістичний варіант                                      | 86,6 | 88,1 | 89,4 | 90,4 | 91,5 | 92,4 |
| Песимістичний варіант                                      | 86,6 | 87,7 | 88,5 | 89,2 | 89,9 | 90,5 |

Таблиця. 1.3 – Прогноз основних параметрів режиму смертності населення України до 2026 р.

#### 1.4.2 Очікувані тенденції міграцій населення

Згідно з песимістичним прогнозом за умови збереження наявних тенденцій соціально-економічного розвитку України кількість іммігрантів залишатиметься сталою, як і масштаби виїзду до інших держав (Рисунок 1.19). Загальне сальдо міграцій населення стабілізується на рівні близькому до сучасного.

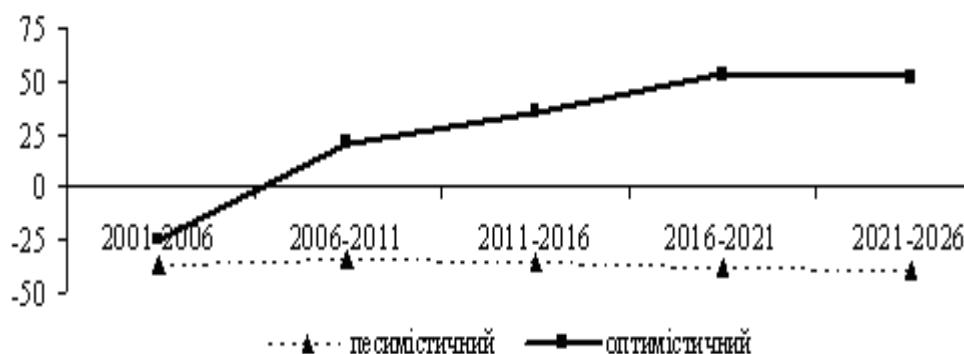


Рисунок 1.19 –Прогноз сальдо міграцій населення, тис. осіб

За оптимістичним варіантом прогнозу, протягом 2015-2025 рр. можлива інтенсифікація повернення етнічних українців та раніше депортованих за національною ознакою з країн колишнього СРСР. Щорічна кількість вибулих до економічно розвинених країн поступово зменшуватиметься, по-перше, через вичерпання етнічної складової цього потоку; по-друге, внаслідок пом'якшення дії чинників, які стимулюють від'їзд; по-третє, завдяки розширенню можливостей здійснення зворотної трудової міграції до цих країн без зміни місця проживання. Підвищення рівня життя населення зробить Україну привабливою для мігрантів з різних регіонів світу. Позитивне сальдо міграцій населення постійно зростатиме і досягне 55-60 тис. осіб у 2026 р., а коефіцієнт інтенсивності міграцій зросте з теперішніх 2,8 до 3,0-3,8%.

### 1.4.3 Прогноз чисельності та складу населення

Вичерпання потенціалу демографічного зростання України визначає неможливість найближчим часом не лише розширеного, а й простого відтворення населення. Навіть за умови збільшення народжуваності до найвищого в сучасній Європі рівня (2 дитини на жінку) і зменшення смертності до найнижчого у світі рівня (середня очікувана тривалість життя при народженні - 80 років) протягом найближчого десятиліття чисельність населення України неухильно скорочуватиметься (Рисунок 1.20 та Таблиця 1.4).

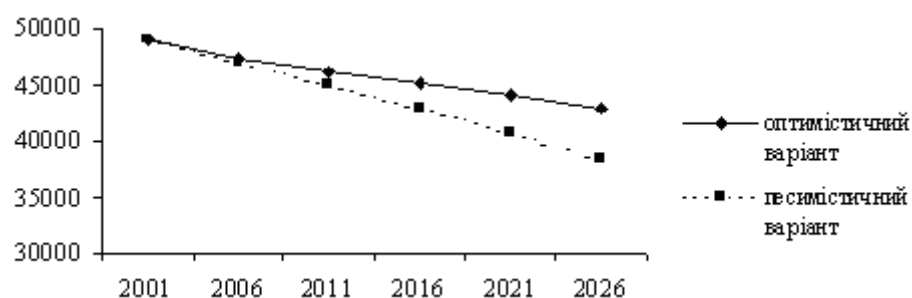


Рисунок 1.20 – Прогноз чисельності населення, тис. Осіб

Таблиця. 1.4 – Основні параметри демографічного прогнозу, тис. осіб  
на початок року

|                                | 2001    | 2006    | 2011    | 2016    | 2021    | 2026    |
|--------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Загальна чисельність населення |         |         |         |         |         |         |
| Оптимістичний варіант          | 49036,5 | 47330,3 | 46198,5 | 45243,7 | 44326,7 | 43352,2 |
| Песимістичний варіант          | 49036,5 | 47301,6 | 45726,2 | 44054,2 | 42238,2 | 40355,5 |
| Чисельність чоловіків          |         |         |         |         |         |         |
| Оптимістичний варіант          | 22775,7 | 21938,2 | 21427,4 | 21044,5 | 20709,4 | 20359,2 |
| Песимістичний варіант          | 22775,7 | 21923,8 | 21185,8 | 20434,1 | 19635,1 | 18809,0 |
| Чисельність жінок              |         |         |         |         |         |         |
| Оптимістичний варіант          | 26260,8 | 25392,1 | 24771,1 | 24199,2 | 23617,3 | 22993,0 |
| Песимістичний варіант          | 26260,8 | 25377,8 | 25540,5 | 23620,1 | 22603,2 | 21546,5 |

Загальні параметри демографічного руху змінюватимуться відповідно до коливання кількості народжених, померлих і загальної кількості населення. Депопуляція, імовірно, дещо послаблюватиметься протягом першого десятиріччя ХХІ ст. (за оптимістичним варіантом - до середини другого десятиріччя) завдяки вступу до найбільш активного репродуктивного віку когорти народжених у середині 80-х років (останнього періоду істотного підвищення народжуваності в Україні). З цього часу різниця між кількістю померлих та народжених неминуче зростатиме.

#### 1.4.4 Перспективи демографічного старіння

Після відносно короткого періоду, коли 60-річну межу переходитимуть нечисленні покоління воєнних років народження, процес старіння продовжуватиметься через низьку народжуваність і зростання середньої тривалості життя, зокрема і в старших вікових групах. У селах цей процес



розвиватиметься повільніше, і на початок 2011 р. його показники в міських поселеннях і сільській місцевості майже зрівняються. Після цього в селах рівень старіння знижуватиметься, а в містах - підвищуватиметься, і до 2026 р. в містах стане істотно вищим, ніж у селах. Відповідно неминуче зростатимуть рівні навантаження населення працездатного віку, що викликатиме низку соціально-економічних проблем, які вимагатимуть посиленої уваги органів влади (Рисунок 1.21).

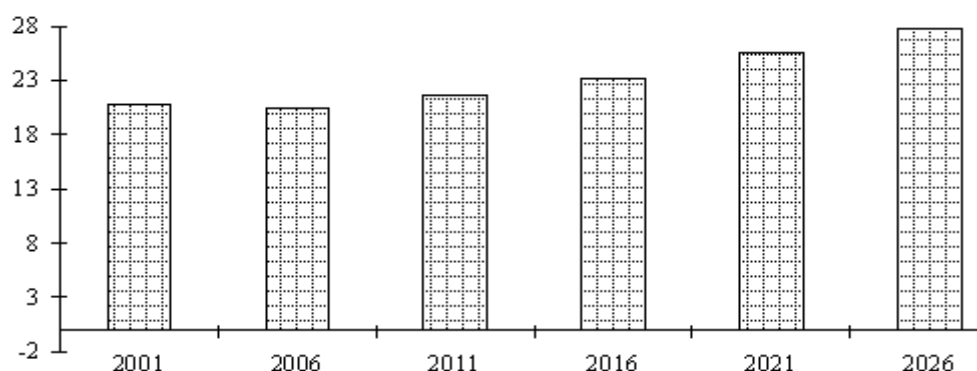


Рисунок 1.21 – Питома вага населення у віці 60 років і старше в загальній його чисельності, %

### 1.5 Головні напрямки демографічної політики України

Демографічна політика — цілеспрямована діяльність державних органів та інших соціальних інститутів у сфері регулювання процесів відтворення населення. Об'єктами демографічної політики може бути населення країни в цілому або окремих регіонів, соціально-демографічні групи населення, сім'ї певних типів або стадій життєвого циклу. Вона являє собою комплекс заходів економічних (оплачувані відпустки і різні види допомоги при народженні дітей, допомога на дітей залежно від їх кількості, віку, типу сім'ї тощо), адміністративно-правових (законодавчі акти, які

регламентують шлюби, розлучення, положення дітей у сім'ях, аліментні обов'язки і т. ін.), а також виховних і пропагандистських, покликаних формувати суспільну думку, норми і стандарти демографічної поведінки.

Згідно зі статтею 3 Конституції України, життя та здоров'я людини, її безпека є найвищими соціальними цінностями, за збереження яких держава відповідає перед нею. А значить питання не лише збереження, а і збільшення нинішньої чисельності українського населення повинно стати для держави одним з основних.

Спеціалісти відділу дослідження проблем розвитку людини Ради з питань відтворення НАН України розробили прогноз демографічного розвитку України до 2076 року. Він містить кілька варіантів, що відповідають найбільш імовірним сценаріям соціально-економічного розвитку України і можливим змінам державної соціально-економічної політики (при цьому прогнозом непередбачені варіанти стихійних лих, техногенних катастроф, масштабних військових конфліктів та інших катаклізмів в країні або сусідніх державах).

Розробці прогнозу передувала всебічний аналіз факторів, що впливають на демографічні процеси, ретельне дослідження народжуваності, смертності, міграцій населення України та глобальних світових тенденцій демографічного розвитку. Одна з базових гіпотез розробки прогнозу – приплив іммігрантів з афро-азійських країн. Це припущення базується на неминучому зменшенні чисельності населення держави та об'єму робочої сили в найближчому майбутньому. При віковій структурі, що склалася, навіть у випадку надзвичайних успіхів в сфері зниження смертності і збільшенні середньої тривалості життя населення – для жінок до рівня 85 років та 80 років для чоловіків, перевага народжуваності над смертністю можлива тільки за умови, якщо кожні 10 українських жінок протягом свого життя народжуватимуть в середньому не менше 25 дітей. Але в Україні, як і в будь-якій іншій європейській державі, третя дитина в сім'ї навряд чи стане поширеним явищем, навіть якщо матеріальні проблеми будуть розв'язані.

Враховуючи, що певна частина сімейних пар обмежиться однією дитиною, а деякі взагалі не зможуть мати дітей, то (і це при найкращому рівні життя) ми все одно не перевищує показник 21-22 дитини на 10 жінок.

Одним з джерел росту (чи бодай стабілізації) чисельності населення України, задоволення потреб економіки в робочій силі та підтримці необхідного рівня життя господарського освоєння територій стають міграційні процеси (власне, в деяких західноєвропейських країнах зростання чисельності досягається саме завдяки міграції).

По-перше, досить важливим заходом для збільшення чисельності населення є створення всіх умов для повернення в Україну людей, що мають українське коріння та проживають за кордоном. Помаранчева революція та Революція гідності створили для цього надзвичайно вигідну психологічну ситуацію. Причому цей напрямок демографічної політики, разом з тим він є складовою ефективною економічною політики, не потребує грошових витрат, навпаки: ці люди привезуть в Україну капітали та безцінний досвід життя та роботи в розвиненому економічному середовищі. Разом з цим потребує вирішення військовий конфлікт на сході, що є серйозною перепорою для повернення населення в Україну.

По-друге, багато жителів афро-азійського регіону, що прагнуть переселитися до країн з ринковою економікою, можуть обрати Україну, якщо можливості поселення та проживання (отримання громадянства, соціальний статус та ін.) тут будуть кращими, ніж в інших державах. І Україна має зробити вибір: сумісне проживання на її території європейських та афро-азійських народів з перспективою формування нової багаточисельної єдиної української нації, або збереження сучасного менталітету населення при його стабільному зменшенні.

Майбутня чисельність населення та його склад будуть залежати передусім від масштабів та напрямлення міграційних процесів. Їх наслідком неодмінно стане омолодження вікової структури (адже переважна більшість

мігрантів – молодь), а тому доля молоді в чисельності населення зростає, відповідно зростає народжуваність та зменшується смертність.

При найбільш зручних тенденціях економічного розвитку та в разі прийняття заходів зі збільшення числа мігрантів з країн третього світу, їх потік може сягнути 50 тис. чол.. через 8-10 років та 300-400 тис. чол.. на рік до середини ХХІ століття. В цьому випадку зменшення чисельності населення припиниться до початку 2020-х, після чого почнеться його зростання. Можна розраховувати, що у 2060 році нас знову буде 52 млн., а за наступні 15 років кількість жителів України зростає на 6 млн. осіб. За найгіршого варіанту розвитку подій потік мігрантів також буде відбуватися, але значних об'ємів він досягне на 10-15 років пізніше. Демографічна криза ще більше загостриться – чисельність буде скорочуватися до середини 2030-х рр., після чого стабілізується на рівні 40-41 млн. чоловік.

Аналіз перспективних розрахунків до 2026 р., тобто приблизно на довжину одного покоління, здійснені Відділом демографії і відтворення трудових ресурсів Інституту економіки НАН України, не дає надії на кардинальні зміни у бік поліпшення ситуації. За найбільш вірогідним сценарієм населення України до початку 2026 р. зменшиться до 42 млн. осіб (міське – до 28 млн., сільське – до 14 млн. осіб). Особи віком 60 років і старше становитимуть 24,6% (у чоловіків – 19,5%, у жінок – 29,2%), тобто слід чекати підвищення рівня постаріння населення [1]. Частка дітей у населенні може зменшитися з 17,2% у 2001 р. до 15% в 2026 р., внаслідок чого статеві-вікова піраміда наблизуватиметься до форми "гриба" (Рисунок 1. 22).

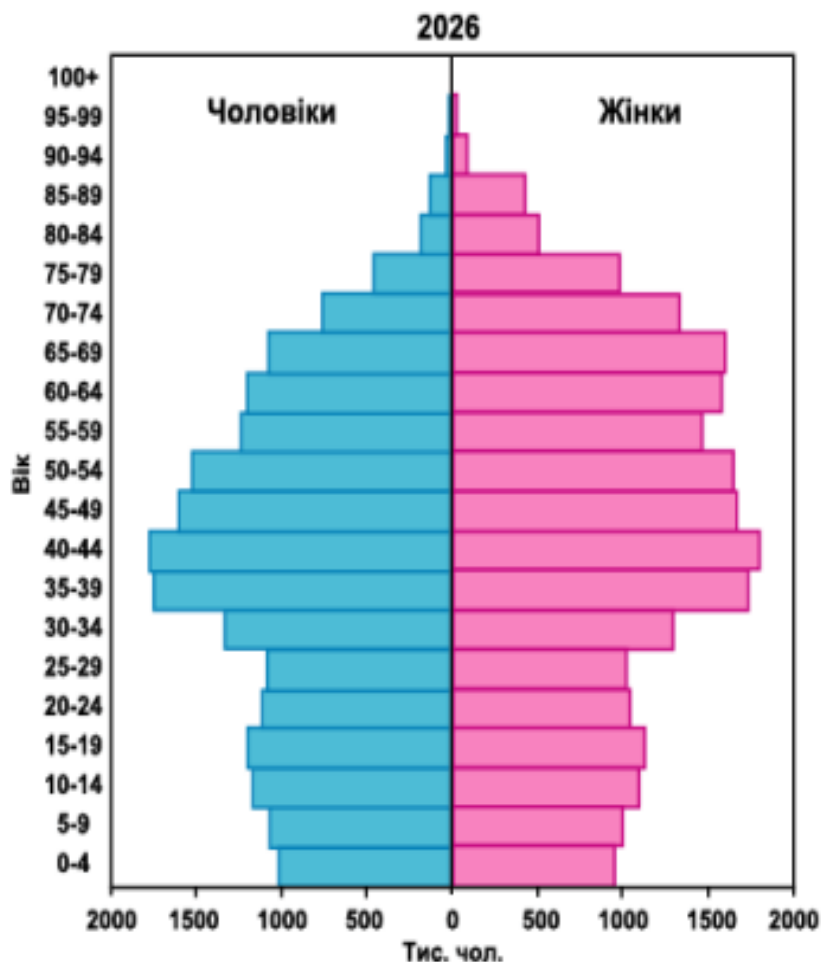


Рисунок 1.22 – Статеві-віковий склад населення України на 2026 р.  
(прогноз)

Протягом наступних 50 років загальна кількість жителів нашої держави поступово буде рости і на початок 2075 року досягне 51,5 млн. чол..

Але найважливішим результатом міграційної політики стане уповільнення темпів старіння населення, досягнення більш-менш допустимого співвідношення між податкоплатівцями та особами, що знаходяться на утриманні держави.

Підхід до розв'язання демографічної проблеми повинен бути комплексним. І проводячи ліберальну імміграційну політику, уряд неодмінно повинен дбати і про корінне населення. А тому необхідно підвищувати рівень народжуваності вже зараз.

Міністерство праці та соціальної політики розробило закон про встановлення виплат жінкам у зв'язку з народженням дитини у розмірі 70460 грн.

В останній час спостерігається деяке пожвавлення в економіці, зокрема за рахунок збільшення рівня стихійної «економічної самодіяльності» населення. Стимулювання росту малого та середнього бізнесу могло б стати більш ефективним засобом допомоги сім'ям з дітьми, ніж прямі доплати на дитину, оскільки в даному випадку кошти були б направлені у виробництво, а не на споживання.

## Висновки

В демографічній ситуації спостерігається тенденція до зростання чисельності населення Землі. На сьогоднішній день вона складає 7,444 млрд. осіб. За оцінками ООН, щодня населення Землі збільшується на чверть мільйона, за рік ця цифра сягає 90 млн., тобто щороку чисельність збільшується на 0,7%.

Але такі показники зумовлені насамперед збільшенням чисельності в найбідніших регіонах світу – країнах що розвиваються. Разом з цим, для економічно розвинутих країнах характерне зниження темпів природного приросту населення.

На відміну від світових тенденцій, населення України продовжує скорочуватися. З часів останнього перепису населення 2001 року (тобто за останні 17 років), чисельність жителів країни зменшилася більш ніж на дев'ять мільйонів чоловік. Від'ємне сальдо міграції, зниження тривалості життя і стрімке падіння народжуваності, війна на сході та анексія Криму, поширення ВІЛ/СНІД та соціальних хвороб стали характерними ознаками демографічних процесів останніх десятиліть і дають підстави кваліфікувати їх як ознаки демографічної кризи.

Щоб поліпшити сучасний демографічний стан, державна політика органів влади повинна насамперед поліпшувати соціально-економічні умови життя населення, лібералізувати міграційну політику та стимулювати народжуваність.

## РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

### 2.1 Методи побудови математичної моделі

#### 2.1.1 Диференційні рівняння

Якщо поставлено задачу скласти вихідні ДР, то можливі дві ситуації: детальна декомпозиція системи на модулі й окремі ланки можлива, або ні. Істинною будемо називати таку модель або такий математичний опис, у яких відомо, що вони детально відповідають фізичній природі системи.

Якщо декомпозиція на модулі й ланки для системи неможлива, то, не маючи детальної інформації про її фізичну природу, можна одержати лише помилкову модель або помилковий математичний опис, які, однак, дозволяють досліджувати систему й одержати адекватні результати. У цьому випадку сукупність вихідних ДР моделі одержують через частотний домен, шляхом експериментального зняття частотних характеристик.

Для фізичної системи порядок системи ДР її істинної моделі звичайно в десять і більше разів вище порядку системи ДР її помилкової моделі. Тим обумовлена широка популярність помилкових моделей, і типових ланок, як структурних елементів для їхнього створення [11].

З метою формалізації процесу складання вихідних ДР систем використовують такі методи, як метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів й їхні аналоги, наявні у всіх енергетичних доменах. У результаті їхнього застосування виходить єдина система:

$$\begin{aligned} a_{11}(p) x_1 + a_{12}(p) x_2 + \dots + a_{1k}(p) x_k &= f_1(t) \\ a_{21}(p) x_1 + a_{22}(p) x_2 + \dots + a_{2k}(p) x_k &= f_2(t) \\ a_{k1}(p) x_1 + a_{k2}(p) x_2 + \dots + a_{kk}(p) x_k &= f_k(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$



де  $x_1, \dots, x_k$  - узагальнені координати системи, у тому числі помилка -  $x(t)$  і регульована величина -  $y(t)$ ;

$f_1(t), \dots, f_k(t)$  - зовнішні координати - що задають вплив  $g(t)$  і збурення  $f(t)$ .

Для зручності й формалізації рішень систему рівнянь (2.1) можна представити в п'яти стандартних формах: у формі Коші; у просторі станів; обчислену відносно регульованої величини -  $y(t)$ ; обчислену відносно помилки -  $x(t)$ ; у вигляді передатних функцій -  $W(p), \Phi(p), \Phi_x(p)$ .

Матрична форма запису системи ДР вирішених винятково щодо першої похідної координат. Можна вирішити систему ДР представлену у формі Коші:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_1f_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_2f_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_3f_3 \end{aligned} \right\}$$

де  $x_1, x_2, x_3$  - власні координати системи - помилка системи  $x(t)$ , вплив на об'єкт  $u(t)$ , вихідна координата -  $y(t)$ , ...;

$a_{11}, \dots, a_{33}$  - постійні коефіцієнти (якщо система не є залежною від параметра) - суми й добуток постійних часу  $T_j$ , коефіцієнтів підсилення  $K_n$ ;

$f_1, f_2, f_3$  - вплив на систему - сигнал завдання  $g(t)$ , перешкоди  $f_j(t)$  [11].

Система ДР може бути перетворена до одного рівняння шляхом виключення проміжних координат (звичайно вихідну координату виражають через координату завдання):

$$g(t); \bar{x}(t); \bar{u}(t); \dots; y(t)$$

Результатом подібного перетворення є рівняння руху системи:

$$D(p) y(t) = R(p) g(t) - N(p) f(t)$$

де  $D(p) = a_0 p_n + a_1 p_{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  - характеристичний поліном;

$R(p) = D(p) - Q(p) = b_0 p_m + b_1 p_{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m$  - коефіцієнти цього полінома визначають вплив заданого впливу  $g(t)$  на регульовану координату  $y(t)$ , причому його ступінь менше ступеня характеристичного полінома, тобто  $m < n$ ;  $N(p) = d_0 p_k + d_1 p_{k-1} + \dots + d_{k-1} p + d_k$  - коефіцієнти полінома визначають вплив перешкоди  $f(t)$  на систему [11].

Якщо система ДР (2.1) вирішується відносно похибки системи, то виходить рівняння похибки замкнутої системи  $D(p) x(t) = Q(p) g(t) + N(p) f(t)$ , де  $D(p) = a_0 p_n + a_1 p_{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  - характеристичний поліном;

$Q(p) = D(p) - R(p) = c_0 p_n + c_1 p_{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n$  - коефіцієнти полінома визначають вплив заданого впливу  $g(t)$ , на помилку  $x(t)$ ;

$N(p) = d_0 p_k + d_1 p_{k-1} + \dots + d_{k-1} p + d_k$  - коефіцієнти полінома визначають вплив перешкоди  $f(t)$  на систему [11].

### 2.1.2 Різницеві рівняння

Завдяки простоті структури й наявності багатьох надійних методів оцінювання параметрів різницеві рівняння (РР) широко застосовують при моделюванні процесів у техніці, економетриці, біології й інших науках.

Простим прикладом різницевого рівняння є стохастичне рівняння першого порядку

$$y(k) = y(k-1) + \varepsilon(k), \quad (2.2)$$

де  $y(k)$  – основна змінна,  $\varepsilon(k)$  – випадкова величина, що відображає вплив різноманітних факторів на основну змінну. У першу чергу це випадкові збурення, які діють на процес. Найчастіше думають, що випадкова величина має наступний нормальний розподіл:  $\{\varepsilon(k)\} \sim N_n(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , тобто вона має нульове середнє та дисперсію  $\sigma_\varepsilon^2$ .

З допомогою рівняння (2.2) описують, наприклад, ціну акції на біржі в якийсь день, що відповідає аргументу  $k$ . Його називають ще рівнянням, що описує процес випадкового кроку. Таку назва воно одержало з тієї причини, що поточне значення основної змінної визначається фактично випадковою змінною. Воно може бути записане також у вигляді першої різниці  $\Delta y(k) = \varepsilon(k)$ , де  $\Delta y(k) = y(k) - y(k-1)$ . Більш загальною формою різницевого рівняння (2.2) є наступна  $\Delta y(k) = \alpha_0 + \alpha_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$ , але для того, щоб воно відповідало процесу випадкового кроку необхідно покласти  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ , інакше це рівняння вже не буде відповідати своєму призначенню. Вкажемо, що порядок різницевого рівняння визначається числом минулих вимірів змінної, які використовуються в правій частині для пояснення основної змінної.

Скороченою формою різницевого рівняння називають таку, у якій основна змінна (у правій частині) залежить від минулих вимірів цих же змінних, минулих вимірів інших ендогенних змінних, поточних і минулих вимірів екзогенних змінних і збурень.

Рівняння вважається структурованим, якщо в ньому ендогенна змінна залежить від поточного (а не минулого) значення іншої ендогенної змінної.

Позитивною стороною використання РР є те, що їхні параметри легко обновляються при надходженні нових вимірів, досить просто можна змінити порядок і структуру математичної моделі. При цьому під структурою моделі мають на увазі кількість рівнянь у моделі, їхній порядок, наявність нелінійності і їхній тип, наявність запізнення (лага) і його оцінка.

При використанні дискретних рівнянь незалежну змінну час  $t$  заміняють дискретним часом  $t = kT_s$ , де  $T_s$  – період дискретизації вимірів, що у техніці приймає значення від однієї мікросекунди до десятків секунд, а при моделюванні економічних процесів – від одного дня до одного року, залежно від того яку статистику можна одержати. Період дискретизації, як правило нормують до одиниці, а незалежною змінною залишається  $k$ . При цьому для кожного прикладного завдання дискретна одиниця часу має своє відповідне значення.

Разом з основною змінною для опису процесів використовують перші й другі різниці, наприклад:

$$\begin{aligned}\Delta y(k) &= y(k) - y(k-1), \\ \Delta y(k+1) &= y(k+1) - y(k), \\ \Delta y(k+2) &= y(k+2) - y(k+1)\end{aligned}$$

Наведені перші різниці відображають швидкість зміни основної змінної, що відповідає першій похідній для рівнянь, записаних у безперервному часі, тобто для диференціальних рівнянь.

Другі різниці відображають швидкість зміни в часі перших різниць і записуються так:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(k) &= \Delta(\Delta y(k)) = \Delta[y(k) - y(k-1)] = \\ &= [y(k) - y(k-1)] - [y(k-1) - y(k-2)] = \\ &= y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\end{aligned}$$

$$\Delta^2 y(k+1) = \Delta(\Delta y(k+1)) = y(k+1) - 2y(k) + y(k-1).$$

На практиці другі різниці використовують досить рідко, а різниці вищого порядку не використовуються [11]. Різницеві рівняння, у правій частині яких присутні минулі виміри основної змінної, називають авторегресійними (АР), тобто регресія змінної на саму себе. Рівняння авторегресії  $n$ -го порядку має вигляд:

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \varepsilon(k)$$

Якщо для процесу, що моделюється, можна виявити вхідну змінну, то вона записується в правій частині

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^q b_j x(k-j) + \varepsilon(k)$$

Якщо  $x(k)$  – випадковий процес, то таке рівняння називають авторегресією з ковзним середнім (АРКС), при цьому коефіцієнт  $b_0$ , як правило приймають рівним одиниці. Гетероскедастичними називають процеси зі змінною дисперсією, а гомоскедастичними – процеси з постійною дисперсією. Формально для гетероскедастичного процесу можна записати  $\text{var}[\varepsilon(k)] = \sigma_\varepsilon^2 \neq \text{const}$ . Припущення гомоскедастичності означає, що варіація кожної випадкової величини  $\varepsilon(k)$  навколо її математичного очікування залишається постійною величиною незалежно від значень факторів. Тобто,  $\sigma_\varepsilon^2$  не є функцією  $x_{ij}$ . Гетероскедастичність означає, що дисперсія процесу зменшується або збільшується в часі, або є більш складною функцією часу. Тобто, вона може змінюватися по досить складних законах, якій потрібно

знайти при створенні моделі процесу. Іноді використовують припущення, коли гетероскедастичність має наступну форму  $\sigma_{\varepsilon(k)}^2 = k^2 x^2$ , де  $k$ - константа, яку необхідно оцінити за допомогою експериментальних даних й обраного методу оцінювання параметрів. Використання умовного прогнозування має значні переваги перед використанням безумовного.

Нехай оцінюється стаціонарна модель авторегресії з ковзним середнім типу  $y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$  й необхідно спрогнозувати величину  $y(k+1)$ . Умовним математичним очікуванням є  $E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 y(k)$ .

Якщо використати це умовне середнє значення для прогнозування значення  $y(k+1)$ , то дисперсія похибки прогнозу буде визначатися як

$$E_k \{ [y(k+1) - a_0 - a_1 y(k)]^2 \} = E_k [\varepsilon^2(k+1)] = \sigma^2.$$

Якщо замість умовного прогнозу використовується безумовний, то він відображає середнє значення для послідовності  $\{y(k)\}$  на нескінченному тимчасовому інтервалі, що дорівнює у цьому випадку  $a_0 / (1 - a_1)$ .

Завдяки тому факту, що умовний прогноз базується на відомих поточних і минулих значеннях ряду, віддають перевагу умовному прогнозуванню.

Якщо дисперсія послідовності  $\{\varepsilon(k)\}$  непостійна, то тенденцію зміни цього параметра можна описати за допомогою моделі АРКС. Наприклад, позначимо через  $\{\hat{\varepsilon}(k)\}$  оцінки залишків (похибок) моделі першого порядку  $y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$ . Для такого випадку умовна дисперсія основної змінної визначається як

$$\text{var}[y(k+1) | y(k)] = E_k \{ [y(k+1) - a_0 - a_1 y(k)]^2 \} = E_k [\varepsilon^2(k+1)].$$

До цього моменту вважалося, що  $E_k[\varepsilon^2(k+1)] = \sigma^2$  є постійною величиною. Покладемо тепер, що умовна дисперсія - змінна величина. Одним із простих підходів до опису такої змінної величини є застосування моделі типу AR(q) до квадратів оцінок залишків. Наприклад,

$$\hat{\varepsilon}^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2(k-1) + \alpha_2 \hat{\varepsilon}^2(k-2) + \dots + \alpha_q \hat{\varepsilon}^2(k-q) + v(k), \quad (2.3)$$

де  $v(k)$  – процес білого шуму.

## 2.2 Методи апроксимації та прогнозування

### 2.2.1 Метод найменших квадратів

$$y = Hx + \varepsilon$$

Обмеження:

$$x = \text{const}; \quad \text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I \quad J = (y - Hx)^T (y - Hx) = y^T y - x^T H^T y - y^T Hx + x^T H^T Hx$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -2H^T y + 2H^T Hx = 0, \quad \text{а отже } \hat{x}_{\text{мл}} = (H^T H)^{-1} H^T y$$

### 2.2.2 Чіткий МГВА

Опис алгоритму. Перша ітерація.

Крок 1.[12] Із множини виходів  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  вибираються пари аргументів  $X_i, X_j$  та складаються часткові описи виду:

$Y_k^{(1)} = \varphi(X_i, X_j), i \neq j, i, j = \overline{1, N}$  при цьому використовують часткові описи квадратичного типу:  $Y_k^{(1)} = a_0 + a_i X_i + a_j X_j + a_{ij} X_i X_j + a_{ii} X_i^2 + a_{jj} X_j^2$  Число часткових описів 1-го ряду дорівнює  $M = n(n-1)/2$ .

Крок 2. Використовуючи метод найменших квадратів (МНК) для кожного опису знаходяться по навчальній вибірці оцінки невідомих коефіцієнтів  $\hat{a}_0, \hat{a}_i, \hat{a}_j, \hat{a}_{ij}, \hat{a}_{ii}, \hat{a}_{jj}$ .

Крок 3. По критерію мінімуму  $\bar{\varepsilon}^2$  на перевіірочній послідовності відбирається  $F_1$  кращих моделей, тобто реалізують процедуру селекції. Величина  $F_1$  називається свободою вибору, при цьому  $F_1 < M$ . Виходи цих моделей використовуються як аргументи-входи для конструювання моделей другого ряду.

Крок 4. Знаходимо  $\bar{\varepsilon}^2(0) = \min_k \bar{\varepsilon}_k^2(0)$ .

m-та ітерація

Крок 1. Конструюються часткові описи виду:

$$Y_k^{(m)} = a_0^{(m)} + a_i^{(m)} X_i + a_j^{(m)} X_j + a_{ij}^{(m)} X_i X_j + a_{ii}^{(m)} X_i^2 + a_{jj}^{(m)} X_j^2, k = 1..F_1(F_1 - 1)/2$$

Крок 2. Для кожного опису, використовуючи МНК, знаходяться

відповідні оцінки  $\hat{a}_0^{(m)}, \hat{a}_i^{(m)}, \hat{a}_j^{(m)}, \hat{a}_{ij}^{(m)}, \hat{a}_{ii}^{(m)}, \hat{a}_{jj}^{(m)}$ .

Крок 3. По перевіірочній послідовності знаходяться для кожного

часткового опису k величини критерію  $\bar{\varepsilon}_k^2(m) = \frac{1}{N_{np}} \sum_{i=1}^{N_{np}} (Y_i - Y_{ki}^{(m)})^2$ , де  $N_{np}$  - об'єм перевіірочної вибірки.

Крок 4. Знаходиться  $\bar{\varepsilon}^2(m) = \min_k \bar{\varepsilon}_k^2(m)$ . Перевіряється умова  $\bar{\varepsilon}^2(m) > \bar{\varepsilon}^2(m-1)$ , де  $\bar{\varepsilon}^2(m), \bar{\varepsilon}^2(m-1)$  - величини критерія точності для найкращих моделей (m-1)-го та m-го ряду селекції відповідно. Якщо так, то кінець. Шукана модель вибирається із часткових описів m-го рівня, на якому досягається мінімальна похибка  $\bar{\varepsilon}^2(m-1)$ . У іншому випадку - перехід до



конструювання наступного ряду часткових описів. При цьому проводиться відбір (селекція)  $F_2$  кращих описів.

Заключний етап. Просуваючись від кінця до початку та роблячи послідовну заміну змінних, враховуються вирази для шуканої моделі у вихідному просторі описів.

### 2.2.3 Нечіткий МГВА

Для побудови часткової моделі НМГВА використовувалась лінійна інтервальна регресійна модель, яка задається наступним чином:  $Y = B_1 z_1 + B_2 z_2 + \dots + B_n z_n$ , де  $z_i$  – деякі відомі змінні,  $B_i$  – інтервали, які можна задати трикутними нечіткими числами та записати наступним чином у вигляді центра  $\alpha_i$  та ширини  $c_i$ :  $B_i = (\alpha_i, c_i)$ . Виходячи з цього,  $Y$  можна

розрахувати наступним чином:  $Y = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i, \sum_{i=1}^n c_i |z_i| \right)$ . Відношення вкладення двох інтервалів  $B_i$  та  $B_j$  ( $B_i \subset B_j$ ) можна задати наступними нерівностями:  $\alpha_j - c_j \leq \alpha_i - c_i, \alpha_j + c_j \geq \alpha_i + c_i$ . У нашому випадку змінні  $z_i$  пов'язані зі

змінними  $x_i$  та  $x_j$  для відповідної часткової моделі НМГВА таким чином:

$z_1 = 1, z_2 = x_i, z_3 = x_j, z_4 = x_i^2, \dots, z_{n-1} = x_i \cdot x_j^{r-1}, z_n = x_j^r$ . Розглянемо метод оцінювання

лінійної інтервальної регресійної моделі. Нехай є  $M$  спостережень  $n+1$  змінної, причому  $n$  з них – незалежні величини, а  $(n+1)$ -ша залежить від інших, і цю залежність  $(x_1, \dots, x_n, y)$  ми намагаємося визначити. При цьому

$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$  та  $y = (y_1, \dots, y_m)$  – вихідні вектори точок спостереження. Тоді

оціночна лінійна інтервальна модель для часткової моделі НМГВА:

$Y_i^* = A_{00}^* + A_{10}^* x_i + A_{11}^* x_j + A_{20}^* x_i^2 + \dots + A_{r-1}^* x_i x_j^{r-1} + A_r^* x_j^r$ . Побудова проводиться з

урахуванням наступних вимог:

1. Задані значення  $y_j$ , які спостерігаються, включаються в оціночний інтервал  $y_j^*$ .
2. Ширина оціночного інтервалу повинна бути мінімальною.

Ці вимоги можна звести до задачі лінійного програмування у наступному вигляді (для  $k$ -тої точки спостереження):

$$\begin{aligned}
 & \min \left( c_0 + c_1 \cdot |X_{ki}| + \dots + c_{C_{r+1}-1} \cdot |X_{ki} \cdot X_{kj}^{r-1}| + c_{C_{r+1}} \cdot |X_{kj}^r| \right) \\
 & \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_{ki} + \dots + \alpha_{C_{r+1}} \cdot X_{kj}^r - (c_0 + c_1 \cdot |X_{ki}| + \dots + c_{C_{r+1}} \cdot |X_{kj}^r|) \leq Y_k \\
 & \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_{ki} + \dots + \alpha_{C_{r+1}} \cdot X_{kj}^r + (c_0 + c_1 \cdot |X_{ki}| + \dots + c_{C_{r+1}} \cdot |X_{kj}^r|) \geq Y_k \\
 & c_p \geq 0, p = \overline{1, C_{r+1}^2}
 \end{aligned}$$

Виходячи з цього, при відомих значеннях змінних  $x_i$  та величини  $y$ , отриманих в результаті  $M$  вимірів, ми приходимо до задачі пошуку коефіцієнтів моделі (для всіх точок спостереження) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 & \min \left( c_0 \cdot M + c_1 \cdot \sum_{k=1}^M |X_{ki}| + \dots + c_{C_{r+1}-1} \cdot \sum_{k=1}^M |X_{ki} \cdot X_{kj}^{r-1}| + c_{C_{r+1}} \cdot \sum_{k=1}^M |X_{kj}^r| \right) \\
 & \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_{ki} + \dots + \alpha_{C_{r+1}} \cdot X_{kj}^r - (c_0 + c_1 \cdot |X_{ki}| + \dots + c_{C_{r+1}} \cdot |X_{kj}^r|) \leq Y_k \\
 & \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_{ki} + \dots + \alpha_{C_{r+1}} \cdot X_{kj}^r + (c_0 + c_1 \cdot |X_{ki}| + \dots + c_{C_{r+1}} \cdot |X_{kj}^r|) \geq Y_k \\
 & k = \overline{1, M}; c_p \geq 0, p = \overline{1, C_{r+1}^2}
 \end{aligned}$$

Задача у тому, щоб мінімізувати область зміни вихідних значень  $Y$  за рахунок пошуку таких значень ширини інтервалів шуканих коефіцієнтів  $c_i$  та таких значень центрів інтервалів  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, C_{r+1}^2}$ , які забезпечували б мінімальне розпорошення величини  $Y$  одночасно з виконанням умови, що вимірювані значення шуканої величини знаходяться у цьому інтервалі. Ця задача є

задачею лінійного програмування. Для її розв'язання перейдемо до двоїстої задачі. Вона запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 & \max \left( \sum_{k=1}^M Y_k \cdot \delta_{k+M} - \sum_{k=1}^M Y_k \cdot \delta_k \right) \\
 & \sum_{k=1}^M \delta_k - \sum_{k=1}^M \delta_{k+M} = 0 \\
 & \sum_{k=1}^M X_{ki} \delta_k - \sum_{k=1}^M X_{ki} \cdot \delta_{k+M} = 0 \\
 & \dots \\
 & \sum_{k=1}^M X^r_{kj} \delta_k - \sum_{k=1}^M X^r_{kj} \cdot \delta_{k+M} = 0 \\
 & \sum_{k=1}^M \delta_k + \sum_{k=1}^M \delta_{k+M} \leq M \\
 & \sum_{k=1}^M |X_{ki}| \cdot \delta_k + \sum_{k=1}^M |X_{ki}| \cdot \delta_{k+M} \leq \sum_{k=1}^M |X_{ki}| \\
 & \dots \\
 & \sum_{k=1}^M |X^r_{kj}| \cdot \delta_k + \sum_{k=1}^M |X^r_{kj}| \cdot \delta_{k+M} \leq \sum_{k=1}^M |X^r_{kj}| \\
 & \delta_k \geq 0; i = \overline{1, 2M}
 \end{aligned}$$

Це задача лінійного програмування. В результаті розв'язку двоїстої задачі симплекс-методом і отримавши оптимальні значення двоїстих змінних, ми зможемо знайти і оптимальні значення шуканих змінних  $c_i$  та  $\alpha_i$   $i = \overline{1, C_{r+1}^2}$ , а разом з цим і визначити шукану модель математичної залежності.

Загальний опис алгоритму:

1. Вибір загального вигляду моделі, яким буде описуватися шукана залежність.
2. Вибір зовнішніх критеріїв оптимальності та свободи вибору.
3. Вибір загального вигляду опорної функції (для багаторядних алгоритмів МГВА).

4. Присвоюємо нульові значення лічильнику числа моделей  $k$  та лічильнику числа рядів  $r$ .
5. Генеруємо нову часткову модель. Визначаємо значення основних критеріїв на ній. Присвоюємо  $k=k+1$ .
6. Якщо  $k \geq C_F^2$ , то  $k=0$ ,  $r=r+1$ . Складаємо середній критерій моделей  $N_{см}^r$ . Якщо  $r=1$ , то переходимо на крок 5, інакше – на крок 7.
7. Якщо  $|N_{см}^r - N_{см}^{r-1}| \leq \varepsilon$ , то йдемо на крок 8, інакше відбираємо  $F$  кращих моделей згідно зовнішнім критеріям і переходимо на крок 5.
8. Із  $F$  кращих моделей по критерію регуляризації вибираємо кращу модель. Відновлюємо аналітичний вид кращої моделі, використовуючи геделеву нумерацію.

Формальними статистиками перевірки якості прогнозу є наступні:

Середньоквадратична похибка RSME [15]:  $RSME = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^T (y_i - \hat{y}_i)^2}$

Середня похибка ME:  $ME = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)}$

Середня відсоткова похибка MPE:  $MPE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \hat{y}_i)}{y_i}}$

Середня відсоткова абсолютна похибка MAPE:  $MAPE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{|y_i|}}$

Коефіцієнт нерівності Тейла  $U$ :  $U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^T (y_i - \hat{y}_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^T (y_i)^2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^T (\hat{y}_i)^2}}$

Відношення упередженості:  $U^M = \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^T (y_i - \hat{y}_i)^2}$ .

## 2.2.4 Прогнозування динаміки процесів за допомогою різницевого рівнянь

При виконанні статистичного аналізу випадкових процесів використовують умовні та безумовні статистичні характеристики. Зокрема, для знаходження короткострокових та довгострокових прогнозів розвитку процесів застосовують умовне  $E_k$ , та безумовне  $E$  математичне сподівання.

Безумовні статистичні характеристики розглядають і оцінюють на довільних часових інтервалах, не накладаючи обмежень на змінні та функції відносно інформації, яка стосується їх конкретних числових значень. Так, безумовне математичне сподівання використовують для знаходження довгострокових прогнозів або умов економічної рівноваги. Умовні статистичні характеристики визначають на конкретний момент часу. При цьому необхідно, щоб на вибраний (заданий) момент часу була в наявності інформація щодо значень змінних та функцій, що аналізуються. Умовне математичне сподівання застосовують для визначення для короткострокових та середньострокових прогнозів.

Структура різницевого рівняння така, що воно дозволяє виконувати прогнозування на один крок (один період дискретизації вимірів) без додаткових перетворень. Тобто в праву частину необхідно підставити минулі значення змінних і обчислити оцінку прогнозу головної змінної в лівій частині. Але для того щоб знайти оцінку прогнозу на більше число кроків, необхідно застосувати деякі попередні перетворення різницевого рівняння (РР). Розглянемо деякі можливі підходи до обчислення прогнозованих значень.

Як приклад, розглянемо рівняння АР(1):

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k), \quad E[\varepsilon(k)] = 0. \quad (2.4)$$

Збільшимо незалежну змінну час на одну одиницю і запишемо рівняння знову:

$$y(k+1) = a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1). \quad (2.5)$$

Якщо коефіцієнти  $a_0, a_1$  відомі, то можна знайти умовне математичне сподівання на основі відомої інформації до моменту  $k$  включно:

$$\begin{aligned} E_k[y(k+1)] &= E_k[y(k+1) | y(k), y(k-1), \dots, \varepsilon(k), \varepsilon(k-1), \dots] = \\ &= a_0 + a_1 E_k[y(k)] = a_0 + a_1 y(k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

оскільки  $y(k)$  в момент  $k$  є відомою константою. По аналогії запишемо рівняння (2.7) для моменту  $k+2$ :

$$y(k+2) = a_0 + a_1 y(k+1) + \varepsilon(k+2) \quad (2.7)$$

і знайдемо умовне математичне сподівання

$$\begin{aligned} E_k[y(k+2)] &= a_0 + a_1 E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 E_k[a_0 + a_1 y(k)] = \\ &= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 y(k). \end{aligned}$$

Для наступного моменту часу маємо  $E_k[y(k+3)] = a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 y(k)$ . Таким чином, для загального випадку прогнозування на  $s$  кроків можна записати

$$E_s[y(k+s)] = a_0 \left( \sum_{i=0}^{s-1} a_1^i \right) + a_1^s y(k) = a_0 \sum_{i=0}^{s-1} a_1^i + a_1^s y(k). \quad (2.8)$$

Отримане рівняння називають функцією прогнозування на довільне число кроків. Прогноз представляє собою збіжний процес, якщо  $|a_1| < 1$  (знаменник геометричної прогресії), тобто

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_k[y(k+s)] = \frac{a_0}{1-a_1}, \quad (2.9)$$

Вираз (2.9) свідчить про те, що для будь-якого стаціонарного процесу АР чи АРКС оцінка умовного прогнозу асимптотично ( $s \rightarrow \infty$ ) збігається до безумовного середнього. Знайдемо похибку прогнозування :

$$f_k(s) = y(k+s) - E_k[y(k+s)]. \quad (2.10)$$

Похибка прогнозу на один крок:

$$f_k(1) = y(k+1) - E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1) - a_0 - a_1 y(k) = \varepsilon(k+1).$$

Похибка прогнозу на два кроки:

$$\begin{aligned} f_k(2) &= y(k+2) - E_k[y(k+2)] = \\ &= a_0 + a_1[a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1)] + \varepsilon(k+2) - E_k[y(k+2)] = \\ &= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 y(k) + a_1 \varepsilon(k+1) + \varepsilon(k+2) - a_0 - a_0 a_1 - a_1^2 y(k) = \\ &= \varepsilon(k+2) + a_1 \varepsilon(k+1). \end{aligned}$$

Таким чином, можемо записати вираз для похибки для довільного числа кроків прогнозування як

$$f_k(s) = \varepsilon(k+s) + a_1 \varepsilon(k+s-1) + a_1^2 \varepsilon(k+s-2) + \dots + a_1^{s-1} \varepsilon(k+1). \quad (2.11)$$

Враховуючи те, що  $E[f_k(s)] = 0$ , є незміщеною. Дисперсія похибки прогнозування:

$$Var[f_k(s)] = \sigma^2 [1 + a_1^2 + a_1^4 + a_1^6 + \dots + a_1^{2(s-1)}],$$

тобто дисперсія є функцією  $s$ . Асимптотичне значення дисперсії похибки прогнозу для стаціонарного процесу  $a_1^2$  – знаменник геометричної прогресії

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Var[f_k(s)] = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}, \quad (2.12)$$

Узагальнення функції прогнозування (на прикладі процесу АРКС(p,q)).

Знайдемо спочатку функцію прогнозування для процесу АРКС(2,1), який описується наступним рівнянням:

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \varepsilon(k) + \beta_1 \varepsilon(k-1) \quad (2.13)$$

Для наступного моменту часу можна записати

$$y(k+1) = a_0 + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \varepsilon(k+1) + \beta_1 \varepsilon(k).$$

Умовне математичне сподівання для  $y(k+1)$  має вигляд  $E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \beta_1 \varepsilon(k)$ , де  $\varepsilon(k)$  розглядається як відома величина на момент  $k$  включно. При цьому  $E_k[\varepsilon(k+j)] = 0, \quad \forall j > 0$ . Для моменту часу  $k+2$  маємо

$$y(k+2) = a_0 + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) + \varepsilon(k+2) + \beta_1 \varepsilon(k+1)$$



і умовне математичне сподівання

$$\begin{aligned}
 E_k[y(k+2)] &= a_0 + a_1 E_k[y(k+1)] + a_2 E_k[y(k)] = \\
 &= a_0 + a_1[a_0 + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \beta_1 \varepsilon(k)] + a_2 y(k) = \\
 &= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 y(k) + a_1 a_2 y(k-1) + a_1 \beta_1 \varepsilon(k) + a_2 y(k) = \\
 &= a_0(1 + a_1) + (a_1^2 + a_2) y(k) + a_1 a_2 y(k-1) + a_1 \beta_1 \varepsilon(k).
 \end{aligned}$$

Можна знайти також наступне умовне математичне сподівання для оцінки прогнозу на три кроки:

$$\begin{aligned}
 E_k[y(k+3)] &= a_0 + a_1 E_k[y(k+2)] + a_2 E_k[y(k+1)] = \\
 &= a_0(1 + a_1 + a_1^2 + a_2) + (a_1^3 + 2a_1 a_2) y(k) + (a_1^2 a_2 + a_2^2) y(k-1) + \beta_1(a_1^2 + a_2) \varepsilon(k)
 \end{aligned}$$

З отриманих виразів для умовного математичного сподівання видно, що рекурсивна формула для прогнозу на довільне число  $s$  кроків може бути записана тільки у наступному вигляді:

$$E_k[y(k+s)] = a_0 + a_1 E_k[y(k+s-1)] + a_2 E_k[y(k+s-2)]. \quad (2.14)$$

Якщо корені характеристичного рівняння, записаного для (2.14), знаходяться всередині одиничного кола, то оцінка прогнозу асимптотично

збігається до безумовного середнього значення  $\lim_{s \rightarrow \infty} E[y(k+s)] = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2}$ ,

а для довільного процесу АРКС(p,q) оцінку умовного прогнозу можна

записати як  $E_k[y(k+s)] = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i E_k[y(k+s-i)]$ .

### 2.2.4.3 Отримання функції прогнозування на основі розв'язку різницевого рівняння

Розглянемо як приклад рівняння АРКС(1,1)

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k) + \beta_1 \varepsilon(k-1), \quad |a_1| < 1, \quad (2.15)$$

Для однорідного рівняння  $\varepsilon(k)$  – білий шум з нульовим середнім;  $y(0) = y_0$  – відома початкова умова  $y(k) - a_1 y(k-1) = 0$  розв'язком є  $A a_1^k$ , де  $A$  – довільна константа. Частковий розв'язок можна знайти за допомогою лагового оператора  $L$  в наступному вигляді:

$$y(k) = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{\varepsilon(k)}{1-a_1 L} + \frac{\beta_1 \varepsilon(k-1)}{1-a_1 L} \quad (2.16)$$

Використовуючи властивості лагового оператора, запишемо загальний розв'язок як

$$y(k) = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(k-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(k-i-1) + A a_1^k. \quad (2.17)$$

Для того щоб знайти значення довільної константи скористаємось початковою умовою:

$$k=0: \quad y_0 = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(-i-1) + A$$

Запишемо розв'язок із врахуванням отриманого значення довільної константи:

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(k-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(k-i-1) + \\ &+ \left[ y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon(-i-1) \right] a_1^k \\ \text{або} \quad y(k) &= \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{k-1} a_1^i \varepsilon(k-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{k-1} a_1^i \varepsilon(k-i-1) + \left[ y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} \right] a_1^k \end{aligned} \quad (2.18)$$

Знайдемо рівняння для оцінки прогнозу із урахуванням того, що на момент  $k=0$  відоме значення збурення  $E_0[\varepsilon(0)] = \varepsilon_0$ . Таким чином, функція прогнозу приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} E_0[y(0+k) | y(0), \varepsilon(0)] &= \frac{a_0}{1-a_1} + E_0 \left[ \sum_{i=0}^{k-1} a_1^i \varepsilon(k-i) + \beta_1 \sum_{i=0}^{k-1} a_1^i \varepsilon(k-1-i) \right] + \\ &+ E_0 \left( \left[ y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} \right] a_1^k \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} a_1^i \varepsilon(k-i) &= \varepsilon(k) + a_1 \varepsilon(k-1) + a_1^2 \varepsilon(k-2) + \dots + a_1^{k-1} \varepsilon(-1) \\ \beta_1 \sum_{i=0}^{k-1} a_1^i \varepsilon(k-1-i) &= \beta_1 \varepsilon(k-1) + \beta_1 a_1 \varepsilon(k-2) + \beta_1 a_1^2 \varepsilon(k-3) + \dots + \beta_1 a_1^{k-1} \varepsilon(0) \end{aligned}$$

отримаємо:

$$E_0[y(k)] = \frac{a_0}{1-a_1} + \beta_1 a_1^{k-1} \varepsilon_0 + \left[ y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} \right] a_1^k \quad (2.19)$$

Рівняння (2.19) можна розглядати як функцію прогнозування на  $k$  кроків наперед на основі інформації, наявної на момент  $k=0$ .

Знайдемо функцію прогнозування на  $s$  кроків вперед на основі інформації, яка є в наявності на момент  $k$ . Спочатку зробимо заміну індексів в рівнянні (2.19):

$$\begin{aligned} E_0[y(s)] &= \frac{a_0}{1-a_1} + \beta_1 a_1^{s-1} \varepsilon_0 + \left[ y_0 - \frac{a_0}{1-a_1} \right] a_1^s = \\ &= \left( \frac{a_0}{1-a_1} \right) (1-a_1^s) + \beta_1 a_1^{s-1} \varepsilon_0 + y_0 a_1^s. \end{aligned}$$

Тепер виконаємо оновлення часового індексу для змінних  $y_i \varepsilon$  на  $k$  одиниць вперед:

$$E_k[y(k+s)] = \left( \frac{a_0}{1-a_1} \right) (1-a_1^s) + \beta_1 a_1^{s-1} \varepsilon(k) + y(k) a_1^s \quad (2.20)$$

Отримане рівняння представляє собою функцію прогнозування на основі відомої інформації про процес на момент  $k$ , включно. Використовуючи наведені вище викладки, можна записати функції прогнозування для різного числа кроків наступним чином [17]:

$$s=1: \quad E_k[y(k+1)] = a_0 + \beta_1 \varepsilon(k) + a_1 y(k),$$

$$s=2: \quad E_k[y(k+2)] = \left( \frac{a_0}{1-a_1} \right) (1-a_1^2) + \beta_1 a_1 \varepsilon(k) + a_1^2 y(k);$$

$$s = 3: \quad E_k[y(k+3)] = \left( \frac{a_0}{1-a_1} \right) (1-a_1^3) + \beta_1 a_1^2 \varepsilon(k) + a_1^3 y(k);$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_k[y(k+s)] = \frac{a_0}{1-a_1}.$$

При цьому

Можна досить просто перейти від моделі АРКС(1,1) до моделі АР(1), якщо покласти  $\beta_1 = 0$ . Для АР(1) отримаємо функцію прогнозування у вигляді:

$$E_k[y(k+s)] = \left( \frac{a_0}{1-a_1} \right) (1-a_1^s) + a_1^s y(k). \quad (2.21)$$

По аналогії можна знайти функції прогнозування для моделей іншої структури. Якщо модель побудована на основі вибірки даних довжиною  $N$ , то для рівняння АРКС(2,1)  $y(k) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y(k-1) + \hat{a}_2 y(k-2) + \hat{\varepsilon}(k) + \hat{\beta}_1 \hat{\varepsilon}(k-1)$ , то функцію прогнозу можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} E_N[y(N+1)] &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y(N) + \hat{a}_2 y(N-1) + \hat{\beta}_1 \hat{\varepsilon}(k); \\ E_N[y(N+2)] &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 E_N[y(N+1)] + \hat{a}_2 y(N); \\ E_N[y(N+s)] &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 E_N[y(N+s-1)] + \hat{a}_2 E_N[y(N+s-2)], \\ &s \geq 2. \end{aligned}$$

Функцію прогнозування можна будувати різними способами, які відрізняються припущеннями щодо процесу (який описується математично і прогнозується), критерію та самої функції. Побудова функції прогнозування, яка забезпечує мінімум дисперсії, базується на наступних припущеннях: процес, який прогнозується, є стаціонарним, гаусовим і має дробово раціональну спектральну густину [17]. Оптимальною вважається функція

прогнозування, яка генерує значення прогнозу шляхом мінімізації дисперсії похибки прогнозу, тобто  $E[y(k+s) - \hat{y}(k+s)]^2 \Rightarrow \min$ . Змінна  $y(k+s)$ , значення якої прогнозується, є функцією всіх попередніх спостережень до моменту  $k$  включно. Результат буде таким же, якщо замінити припущення про нормальність процесу припущенням про те, що він є двічі диференційованим, а функцією прогнозування є лінійна функція спостережень. Розглянемо стохастичне різницеве рівняння

$$y(k+1) = -a y(k) + \varepsilon(k+1) + \beta \varepsilon(k), \quad (2.24)$$

де  $\{\varepsilon(k)\} \sim N(0,1)$ , тобто нормально розподілений процес із нульовим середнім та одиничною дисперсією. Розглянемо спочатку функцію прогнозування на один крок за допомогою рівняння (2.24). Для того щоб знайти значення  $y(k+1)$ , необхідно знати  $y(k)$ ,  $\varepsilon(k)$ . Значення  $y(k)$  – це значення останнього виміру, а  $\varepsilon(k)$  необхідно обчислити. Нехай відомі початкові значення  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ ,  $y(0) = y_0$ . Запишемо рівняння (2.24) у вигляді:

$$\varepsilon(\tau+1) - y(\tau+1) + \beta \varepsilon(\tau) = a y(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq k$$

і знайдемо розв'язок для цього рівняння. Додамо до лівої і правої частин член  $-\beta y(\tau)$  і отримаємо

$$[\varepsilon(\tau+1) - y(\tau+1)] + \beta[\varepsilon(\tau) - y(\tau)] = (a - \beta) y(\tau). \quad (2.25)$$

Введено нову змінну  $x(\tau) = \varepsilon(\tau) - y(\tau)$  і запишемо різницеве рівняння для нової змінної

$$x(\tau + 1) = -\beta x(\tau) + (a - b)y(\tau) \quad (2.26)$$

і знайдемо розв'язок цього рівняння методом прямої ітерації:

$$\begin{aligned} x(1) &= -\beta x(0) + (a - \beta)y(0), \\ x(2) &= -\beta x(1) + (a - \beta)y(1) = -\beta[-\beta x(0) + (a - \beta)y(0)] + (a - \beta)y(1) = \\ &= -\beta^2 x(0) - \beta(a - \beta)y(0) + (a - \beta)y(1), \\ x(3) &= -\beta x(2) + (a - \beta)y(2) = \\ &= -\beta^3 x(0) + \beta^2(a - \beta)y(0) - \beta(a - \beta)y(1) + (a - \beta)y(2). \end{aligned}$$

Для довільного  $k$  розв'язок має наступний вигляд:

$$x(k) = (-\beta)^k x(0) + (a - \beta) \sum_{i=0}^{k-1} (-\beta)^{k-1-i} y(i) \quad (2.27)$$

Зробимо перевірку індексів: при  $k=1$  останній член в правій частині має вигляд:  $(a - \beta)y(0)$ ; при  $k=2$  маємо наступне рівняння:  $(a - \beta) \sum_{i=0}^1 (-\beta)^{1-i} y(i) = -\beta(a - \beta)y(0) + (a - \beta)y(1)$ , тобто, часові індекси в рівнянні (2.27) змінюються в належних інтервалах. Використовуючи рівняння (2.27), можемо записати вираз для  $\varepsilon(k)$ :

$$\varepsilon(k) = [\varepsilon(0) - y(0)](-\beta)^k + y(k) + (a - \beta) \sum_{i=0}^{k-1} (-\beta)^{k-1-i} y(i) \quad (2.28)$$

а для довільного початкового моменту часу  $k_0$  отримаємо

$$\varepsilon(k) = [\varepsilon(0) - y(0)](-\beta)^{k-k_0} + y(k) + (a - \beta) \sum_{i=0}^{k-1} (-\beta)^{k-1-i} y(i) \quad (2.29)$$

Оскільки для стаціонарного процесу  $|\beta| < 1$ , то перший член (2.28) і (2.29) наближається до нуля при  $k_0 \rightarrow \infty$  для довільних початкових умов. Таким чином,  $\varepsilon(k)$  може бути обчислено безпосередньо за допомогою

$$\varepsilon(k) = y(k) + (a - \beta) \sum_{i=-\infty}^{k-1} (-\beta)^{k-1-i} y(i).$$

результатів вимірів із рівняння

Таким чином, можемо записати рівняння для прогнозування значення  $y(k+1)$  на основі спостережень  $y(k), y(k-1), y(k-2), \dots$  у вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k) &= \hat{y}(k+1, k) = \hat{y}(k+1) = -a y(k) + \beta \varepsilon(k) = \\ &= -a y(k) + \beta y(k) + \beta(a - \beta) \sum_{i=-\infty}^{k-1} (-\beta)^{k-1-i} y(i) = \\ &= -(a - \beta) y(k) + \beta(a - \beta) \sum_{i=-\infty}^{k-1} (-\beta)^{k-1-i} y(i) = (\beta - a) \sum_{i=-\infty}^k (-\beta)^{k-i} y(i) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Рівняння (2.30) можна переписати у рекурсивній формі

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1, k) &= (\beta - a) \left[ y(k) + \sum_{i=-\infty}^{k-1} (-\beta)^{k-i} y(i) \right] = \\ &= (\beta - a) \left[ y(k) + (-\beta) \sum_{i=-\infty}^{k-1} (-\beta)^{k-1-i} y(i) \right] = -\beta \hat{y}(k, k-1) + (\beta - a) y(k) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Тобто, функція прогнозування на один крок описується РР першого порядку. Динаміка прогнозу визначається коефіцієнтом  $\beta$ .



За визначенням, похибка прогнозу дорівнює  $f(k+1, k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1, k) = \varepsilon(k+1)$ , а її математичне сподівання  $E[f(k+1, k)] = 0$ . Альтернативна форма функції прогнозування на один крок

Введемо оператор зсуву  $z x(k) = x(k+1)$  або  $z^{-1} x(k) = x(k-1)$ . Тепер рівняння

$$y(k+1) = -a y(k) + \varepsilon(k+1) + \beta \varepsilon(k) \quad (2.32)$$

можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \frac{1 + \beta z^{-1}}{1 + a z^{-1}} \varepsilon(k+1) = \varepsilon(k+1) - \varepsilon(k+1) + \frac{1 + \beta z^{-1}}{1 + a z^{-1}} \varepsilon(k+1) = \\ &= \varepsilon(k+1) + \frac{-\varepsilon(k+1) - a \varepsilon(k) + \varepsilon(k+1) + \beta \varepsilon(k)}{1 + a z^{-1}} = \\ &= \varepsilon(k+1) + \frac{\beta - a}{1 + a z^{-1}} \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Із рівняння (2.32) знайдемо вираз для випадкової величини

$$\varepsilon(k) = \frac{1 + a z^{-1}}{1 + \beta z^{-1}} y(k) \quad (2.34)$$

і підставимо цей вираз в (2.33) щоб уникнути змінної  $\varepsilon(k)$  з метою зменшення невизначеності прогнозу:

$$y(k+1) = \varepsilon(k+1) + \frac{\beta - a}{1 + \beta z^{-1}} y(k) \quad (2.35)$$

Віднімемо від обох частин цього рівняння прогнозоване значення  $\hat{y}(k+1, k)$  і знайдемо математичне сподівання квадрата похибки прогнозу:

$$E_k[y(k+1) - \hat{y}(k+1, k)]^2 = E[\varepsilon^2(k+1)] + E\left[\frac{\beta - a}{1 + \beta z^{-1}} y(k) - \hat{y}(k+1, k)\right]^2$$

при умові, що  $E[y(k)\varepsilon(k+1)] = 0$ . Якщо дисперсію збурення нормувати до одиниці, тобто  $E[\varepsilon^2(k)] = 1$ , то можна записати наступне співвідношення:

$$E[y(k+1) - \hat{y}(k+1, k)] \geq E[\varepsilon^2(k+1)] = 1,$$

де рівність виконується тільки при умові, що  $\hat{y}(k+1, k) = \frac{\beta - a}{1 + \beta z^{-1}} y(k)$ .

Таким чином, оптимальне з точки зору мінімуму дисперсії похибки прогнозу значення для прогнозу на один крок можна знайти за допомогою рівняння  $\hat{y}(k+1, k) + \beta \hat{y}(k, k-1) = (\beta - a) y(k)$  або

$$\hat{y}(k+1, k) = -\beta \hat{y}(k, k-1) + (\beta - a) y(k), \quad (2.36)$$

що співпадає з отриманим вище рівнянням (2.31).

## Висновки

В цьому розділі розглянуто сучасні методи побудови математичних моделей, насамперед диференціальні та різницеві рівняння, які стали особливо популярними в останні двадцять років. Також наведені різні методи прогнозування та апроксимації.

Завдяки простоті структури й наявності багатьох надійних методів оцінювання параметрів, різницеві рівняння (РР) широко застосовують при

модельованні процесів у техніці, економетриці, біології та інших науках. В даній магістерській дисертації РР застосовуються для описання динаміки чисельності населення України та побудови функцій короткострокового і середньострокового прогнозування. Також я використовував чіткий та нечіткий МГВА.

## РОЗДІЛ 3 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ І ПРОГНОЗУВАННЯ ДЕМОГРАФІЧНОГО СТАНУ В УКРАЇНІ

3.1 Побудова математичних моделей для основних демографічних показників.

### 3.1.1 Вхідні дані

На основі даних зібраних з різних джерел статистичних даних, я спробував зробити прогноз динаміки народонаселення. При цьому були застосовані різні підходи до моделювання динамічних процесів.

Для роботи з побудови математичної моделі я користувався спеціалізованим пакетом Econometric Views 9.5.

Вхідними даними є п'ять вибірок з тридцяти чотирьох значень, що описують динаміку зміни чисельності всього населення (ALL), динаміку народжуваності (BIRTH), динаміку смертності (DEATH), динаміку зареєстрованих шлюбів (MARRIAGE) та розлучень (DIVORCE) з 1991 по 2018 рік. Дані з цих файлів були переміщені в робочу область пакету EViews (Рисунок 3.1).

| View   | Proc | Object   | Print | Name     | Freeze | Default  | Sort | Edit+/-  | Smpl+/- | Compare+/- |
|--------|------|----------|-------|----------|--------|----------|------|----------|---------|------------|
|        |      | ALL      |       | BIRTH    |        | DEATH    |      | DIVORCE  |         | MARRIAGE   |
| 1991_1 |      | 51.83850 |       | 0.657200 |        | 0.629600 |      | 0.192800 |         | 0.482900   |
| 1991_2 |      | 51.94756 |       | 0.644000 |        | 0.649750 |      | 0.196800 |         | 0.488000   |
| 1992_1 |      | 52.05662 |       | 0.630800 |        | 0.669900 |      | 0.200800 |         | 0.493100   |
| 1992_2 |      | 52.15039 |       | 0.613800 |        | 0.683500 |      | 0.211700 |         | 0.443600   |
| 1993_1 |      | 52.24417 |       | 0.596800 |        | 0.697100 |      | 0.222600 |         | 0.394100   |
| 1993_2 |      | 52.17929 |       | 0.577150 |        | 0.719400 |      | 0.220800 |         | 0.411000   |
| 1994_1 |      | 52.11441 |       | 0.557500 |        | 0.741700 |      | 0.219000 |         | 0.427900   |
| 1994_2 |      | 51.92141 |       | 0.539500 |        | 0.753150 |      | 0.213300 |         | 0.413550   |
| 1995_1 |      | 51.72840 |       | 0.521500 |        | 0.764600 |      | 0.207600 |         | 0.399200   |
| 1995_2 |      | 51.53128 |       | 0.507200 |        | 0.778600 |      | 0.202950 |         | 0.415450   |
| 1996_1 |      | 51.33415 |       | 0.492900 |        | 0.792600 |      | 0.198300 |         | 0.431700   |
| 1996_2 |      | 51.11383 |       | 0.480050 |        | 0.784650 |      | 0.195650 |         | 0.369600   |
| 1997_1 |      | 50.89352 |       | 0.467200 |        | 0.776700 |      | 0.193000 |         | 0.307500   |
| 1997_2 |      | 50.69673 |       | 0.454900 |        | 0.765450 |      | 0.190600 |         | 0.326250   |
| 1998_1 |      | 50.49994 |       | 0.442600 |        | 0.754200 |      | 0.188200 |         | 0.345000   |
| 1998_2 |      | 50.30281 |       | 0.430900 |        | 0.737050 |      | 0.183950 |         | 0.327750   |
| 1999_1 |      | 50.10568 |       | 0.419200 |        | 0.719900 |      | 0.179700 |         | 0.310500   |
| 1999_2 |      | 49.90826 |       | 0.404200 |        | 0.729550 |      | 0.177750 |         | 0.327700   |
| 2000_1 |      | 49.71083 |       | 0.389200 |        | 0.739200 |      | 0.175800 |         | 0.344900   |
| 2000_2 |      | 49.32587 |       | 0.387150 |        | 0.748650 |      | 0.186550 |         | 0.309700   |
| 2001_1 |      | 48.94090 |       | 0.385100 |        | 0.758100 |      | 0.197300 |         | 0.274500   |
| 2001_2 |      | 48.67826 |       | 0.380750 |        | 0.752000 |      | 0.189300 |         | 0.292050   |
| 2002_1 |      | 48.41563 |       | 0.376400 |        | 0.745900 |      | 0.181300 |         | 0.309600   |
| 2002_2 |      | 48.20050 |       | 0.370500 |        | 0.735000 |      | 0.175000 |         | 0.310000   |

Рисунок 3.1 – Вхідні дані, представлені у вигляді групи в пакеті EViews

### 3.1.2 Модель динаміки чисельності народонаселення

Розглядаємо можливість описання чисельності населення за допомогою моделі авторегресії з ковзним середнім. Авторегресійні моделі найпростіші за своєю структурою, але досить часто мають високу адекватність досліджуваному процесу. Побудову моделей необхідно починати з моделей нижчих порядків, які часто мають прийнятну адекватність процесу і забезпечують високу якість прогнозу.

Використовуючи пакет EViews, були побудовані такі моделі:

$$1) y(k) = c(1) + c(2) * y(k-1)$$

|                    | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| C(1)               | -0.699376   | 0.722353              | -0.968192   | 0.3379 |
| C(2)               | 1.010889    | 0.014920              | 67.75256    | 0.0000 |
| R-squared          | 0.989865    | Mean dependent var    | 48.16866    |        |
| Adjusted R-squared | 0.989649    | S.D. dependent var    | 2.717426    |        |
| S.E. of regression | 0.276465    | Akaike info criterion | 0.306497    |        |
| Sum squared resid  | 3.592355    | Schwarz criterion     | 0.383714    |        |
| Log likelihood     | -5.509183   | Hannan-Quinn criter.  | 0.335793    |        |
| F-statistic        | 4590.410    | Durbin-Watson stat    | 1.470699    |        |
| Prob(F-statistic)  | 0.000000    |                       |             |        |

Рисунок 3.3 – Результат роботи програми EViews при побудові першої моделі

Отримана модель AP(1):  $y(k) = -0.6994 + 1.011 * y(k-1) + e(k)$

Статистичні характеристики:  $R^2 = 0,996$ ;  $SSR = 0,433$ ;  $DW = 0,369$

Як бачимо, коефіцієнт множинної детермінації має досить гарне значення (0,996), сума квадратів похибок досить низьке, що теж добре (0,433), статистика Дарбіна-Уотсона замала (0,369). Таким чином, загальна адекватність моделі AP(1) досить непогана, але структуру моделі треба уточнити. Одразу можна перевірити характеристики прогнозу (Рисунок 3.4.):

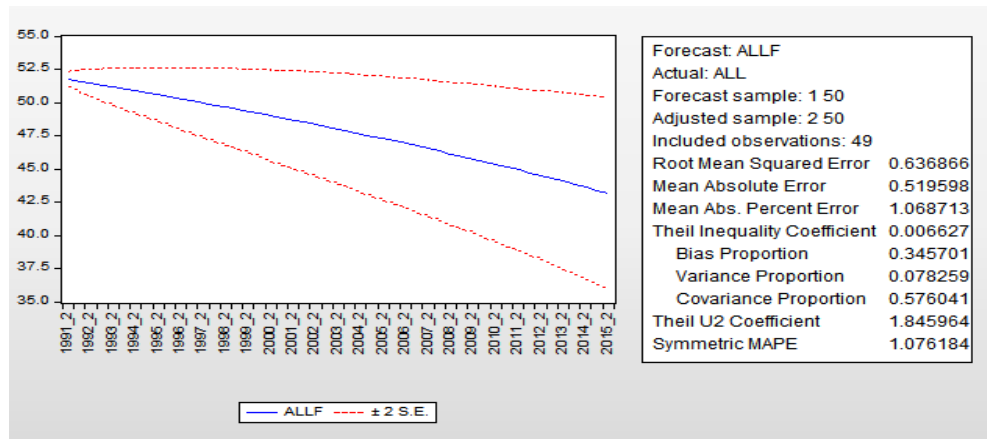


Рисунок 3.4 – Оцінки для першої моделі

СеКП = 0,637; САП = 0,52; САПП = 1;  $U = 0,0066$ . Середньоквадратична похибка (СеКП), середня абсолютна похибка (САП), середня абсолютна похибка в процентах (САПП) і коефіцієнт Тейла, який свідчить про загальну придатність моделі для прогнозування.

$$2) y(k) = c(1) + c(2) * y(k-1) + c(3) * y(k-2)$$

Отримана модель AP(2):  $y(k) = -0.181 + 1.217 * y(k-1) - 0.215 * y(k-2) + e(k)$

Статистичні характеристики:  $R^2 = 0,999$ ;  $SSR = 3,409$ ;  $DW = 1,566$ .  
Характеристики якості однокрокового прогнозу: СеКП = 0,574; САП = 0,456; САПП = 0,938;  $U = 0,006$ .

$$3) y(k) = c(1) + c(2) * y(k-1) + c(3) * y(k-2) + c(4) * y(k-3)$$

Отримана модель AP(3):  $y(k) = -0.408 + 1.741 * y(k-1) - 1.785 * y(k-2) + 1.048 * y(k-3) + e(k)$

Статистичні характеристики:  $R^2 = 0,999$ ;  $SSR = 2,263$ ;  $DW = 1,551$ .

Характеристики якості однокрокового прогнозу: СеКП = 0,672; САП = 0,559; САПП = 1,166;  $U = 0,007$

$$4) y(k) = c(1) + c(2) * y(k-1) + c(3) * y(k-2) + c(4) * y(k-3) + c(5) * y(k-4) + c(6) * y(k-5)$$

Отримана модель AP(5):  $y(k) = -0.129 + 1.765 * y(k-2) + 2.077 * y(k-3) - 1.065 * y(k-4) + 0.258 * y(k-5) + e(k)$

Статистичні характеристики:  $R^2 = 0,994$ ;  $SSR = 1,806$ ;  $DW = 1,96$ .

Характеристики прогнозу:  $SeKP = 0,943$ ;  $CAП = 0,693$ ;  $CAПП = 1,495$ ;  $U = 0,0098$ .

Для вибору моделі прогнозування динаміки народонаселення, порівняйте отримані моделі за статистичними характеристиками та обираємо найкращу. Крім того, до таблиці зведені також характеристики якості однокрокового прогнозу (Таблиця.3.1). Коефіцієнт множинної детермінації ( $R^2$ ), сума квадратів похибок ( $SSR$ ), статистика Дарбіна-Уотсона ( $DW$ ), середньоквадратична похибка ( $SeKP$ ), середня абсолютна похибка ( $CAП$ ), середня абсолютна похибка в процентах ( $CAПП$ ), коефіцієнт Тейла ( $U$ ).

Таблиця 3.1 – Статистичні характеристики побудованих моделей динаміки чисельності народонаселення

| ALL   | $R^2$ | SSR   | DW   | СеКП  | САП   | САПП  | U      |
|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|--------|
| AP(1) | 0,99  | 3,592 | 1,47 | 0,637 | 0,52  | 1     | 0,0066 |
| AP(2) | 0,999 | 3,409 | 1,56 | 0,574 | 0,456 | 0,938 | 0,006  |
| AP(3) | 0,993 | 2,263 | 1,55 | 0,672 | 0,559 | 1,166 | 0,007  |
| AP(5) | 0,994 | 1,806 | 1,96 | 0,943 | 0,643 | 1,495 | 0,0098 |

Таким чином, найкращою для побудови прогнозу буде модель AP(2):

$$y(k) = -0.181 + 1.217 * y(k-1) - 0.215 * y(k-2) + e(k)$$

Для цієї моделі коефіцієнт множинної детермінації наближається до найкращого значення – 1, сума квадратів похибок – найменша, а статистика Дарбіна-Уотсона близька до ідеального. Характеристики однокрокового прогнозу також найкращі для цієї моделі

### 3.1.3 Модель динаміки чисельності населення України за показниками народжуваності та смертності

Для побудови цієї моделі використовувались дані однієї вибірки з 34 значень – показник народжуваності (BIRTH) з 1991 по 2018 роки. Для визначення загальної тенденції, дані можна представити у вигляді графіку (Рисунок 3.5).

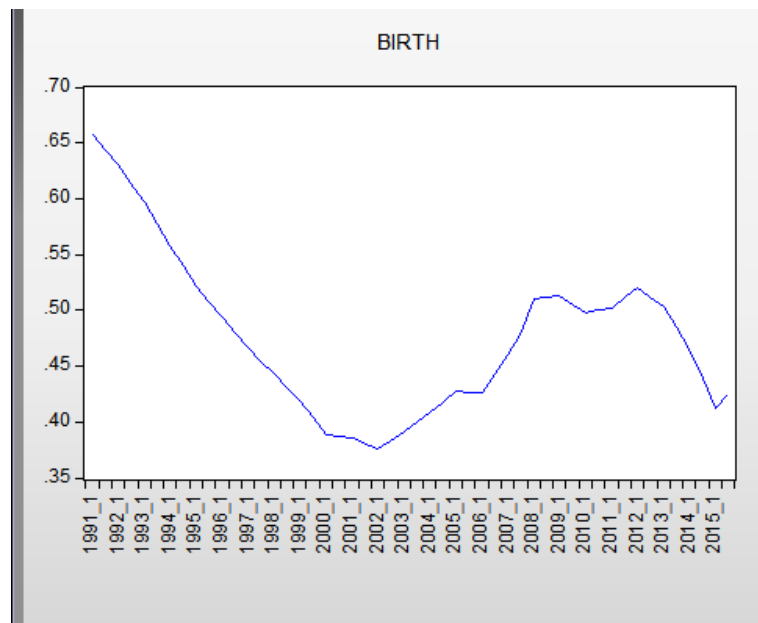


Рисунок 3.5 – Динаміка чисельності населення України за показником народжуваності за період з 1991 по 2018 роки

Для вибору моделі прогнозування динаміки народонаселення, порівняємо отримані моделі за статистичними характеристиками та обираємо найкращу. Крім того, до Таблиці 3.2 зведені також характеристики якості однокрокового прогнозу.

Таблиця 3.2 – Статистичні характеристики побудованих моделей динаміки чисельності народонаселення за показником народжуваності

| BIRTH | $R^2$ | SSR   | DW    | СєКП  | САП   | САПП  | U     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AP(1) | 0,986 | 0,003 | 0,271 | 0,037 | 0,029 | 7,071 | 0,039 |



|        |       |        |       |       |       |       |       |
|--------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AP(2)  | 0,996 | 0,001  | 2,007 | 0,027 | 0,021 | 5,049 | 0,029 |
| AP(6)  | 0,992 | 0,001  | 1,953 | 0,014 | 0,012 | 2,845 | 0,016 |
| AP(8)  | 0,989 | 0,0004 | 2,193 | 0,009 | 0,007 | 1,757 | 0,010 |
| AP(10) | 0,996 | 0,0003 | 1,938 | 0,009 | 0,007 | 1,673 | 0,009 |

Таким чином, найкращою для побудови прогнозу буде модель AP(6):  
 $y(k)=0.014+1.742y(k-1)-1.035y(k-2)+0.45y(k-3)-0.03y(k-4)-0.067y(k-5)-$   
 $0.094y(k-6)+e(k)$ . Аналогічним чином перевіримо модель за показником смертності. Для визначення загальної тенденції, дані можна представити у вигляді графіку (Рисунок 3.6).

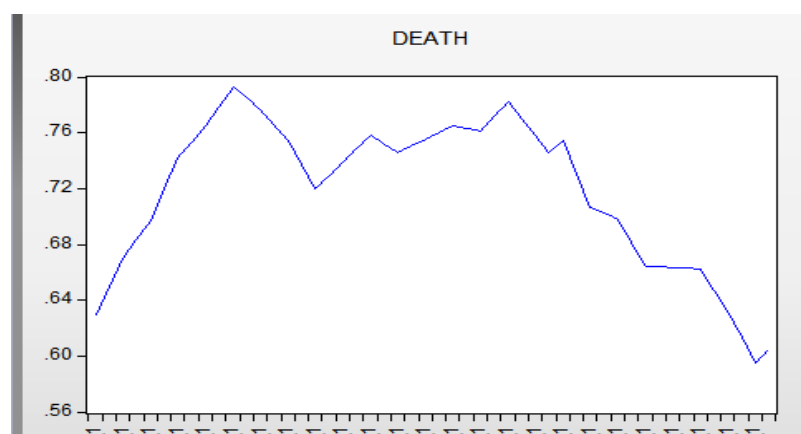


Рисунок 3.6 – Динаміка чисельності населення України за показником смертності за період з 1991 по 2018 роки

Результати побудови моделей зведені в Таблицю 3.3 та обрана краща модель для прогнозування.

Таблиця 3.3 – Статистичні характеристики побудованих моделей динаміки чисельності народонаселення за показником смертності

| DEATH | R <sup>2</sup> | SSR   | DW    | СеКП  | САП   | САПП  | U     |
|-------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AP(1) | 0,915          | 0,003 | 0,763 | 0,019 | 0,014 | 1,911 | 0,013 |
| AP(2) | 0,933          | 0,002 | 1,796 | 0,016 | 0,013 | 1,699 | 0,011 |
| AP(4) | 0,894          | 0,001 | 2,09  | 0,013 | 0,011 | 1,423 | 0,009 |

|        |       |        |       |       |       |       |       |
|--------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AP(5)  | 0,867 | 0,001  | 2,022 | 0,012 | 0,009 | 1,307 | 0,008 |
| AP(11) | 0,848 | 0,0008 | 1,769 | 0,011 | 0,009 | 1,152 | 0,007 |

Найкращою для побудови прогнозу буде модель AP(4):

$$y(k) = 0.148 + 1.512 * y(k-1) - 0.948 * y(k-2) + 0.419 * y(k-3) - 0.181 * y(k-4) + e(k)$$

#### 3.1.4. Модель динаміки чисельності народонаселення за показниками зареєстрованих шлюбів та розлучень

Аналогічним чином перевіримо модель за показником зареєстрованих шлюбів. Для визначення загальної тенденції, дані можна представити у вигляді графіку (Рисунок 3.7).

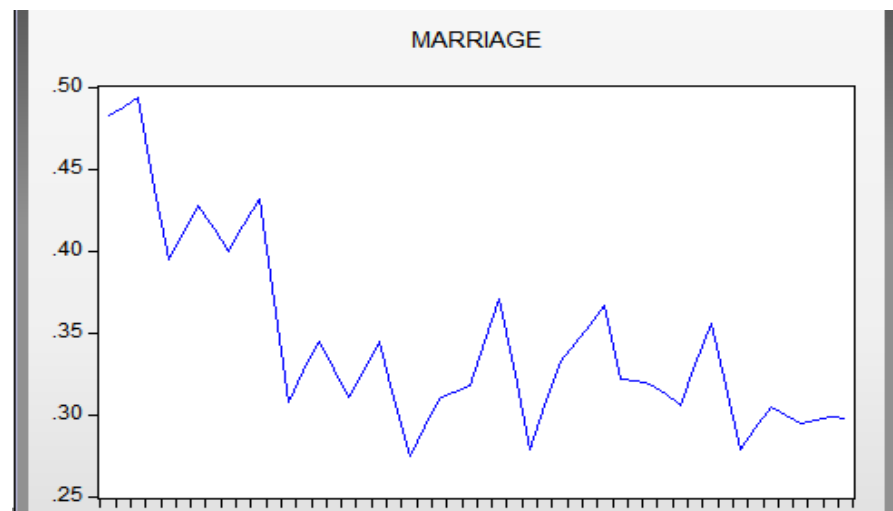


Рисунок 3.7 – Динаміка чисельності населення України за показником зареєстрованих шлюбів за період з 1991 по 2018 роки

Результати побудови моделей зведені в Таблицю 3.4 та обрана краща модель для прогнозування.

Таблиця 3.4 – Статистичні характеристики побудованих моделей динаміки чисельності нащадків за показником зареєстрованих шлюбів

| MARRIAGE | $R^2$ | SSR   | DW    | СеКП  | САП   | САПП  | U     |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AP(1)    | 0,782 | 0,023 | 1,548 | 0,035 | 0,029 | 8,513 | 0,048 |
| AP(2)    | 0,769 | 0,02  | 1,696 | 0,038 | 0,031 | 9,062 | 0,053 |
| AP(7)    | 0,894 | 0,005 | 1,113 | 0,027 | 0,024 | 7,243 | 0,039 |
| AP(9)    | 0,954 | 0,002 | 1,869 | 0,016 | 0,013 | 3,676 | 0,024 |

Найкращою для побудови прогнозу буде модель AP(9):

$$y(k) = 0.039 + 1.737y(k-1) - 1.762y(k-2) + 1.758y(k-3) - 1.804y(k-4) + 1.783y(k-5) - 1.752y(k-6) + 1.763y(k-7) - 0.713y(k-8) - 0.042y(k-9) + e(k)$$

Перевіримо модель за показником зареєстрованих розлучень. Для визначення загальної тенденції, дані можна представити у вигляді графіку (Рисунок 3.8).

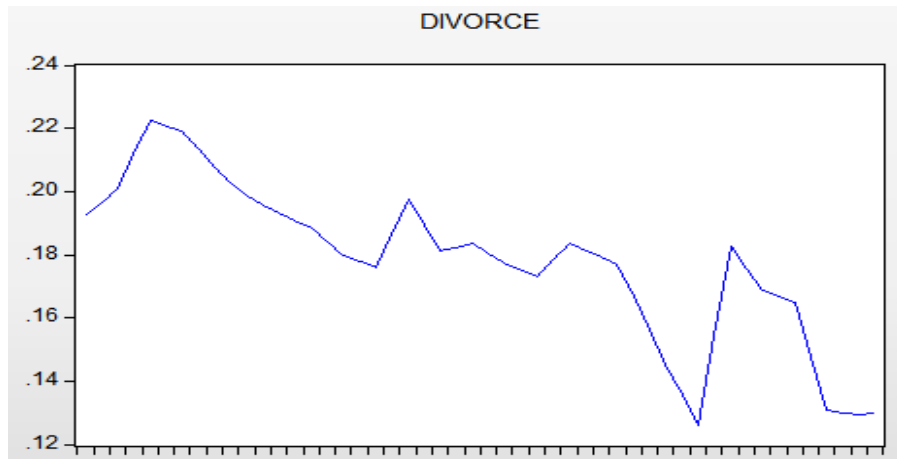


Рисунок 3.8 – Динаміка чисельності населення України за показником зареєстрованих розлучень за період з 1991 по 2018 роки

Результати побудови моделей зведені в Таблицю 3.5 та обрана краща модель для прогнозування

Таблиця 3.5 – Статистичні характеристики побудованих моделей динаміки чисельності народонаселення за показником зареєстрованих розлучень

| DIVOR<br>CE | R <sup>2</sup> | SSR    | DW    | СеКП  | САП   | САПП  | U     |
|-------------|----------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AP(1)       | 0,867          | 0,0008 | 1,027 | 0,013 | 0,009 | 4,853 | 0,034 |
| AP(2)       | 0,904          | 0,0006 | 1,700 | 0,012 | 0,009 | 4,977 | 0,032 |
| AP(3)       | 0,913          | 0,0005 | 1,724 | 0,011 | 0,008 | 4,212 | 0,028 |
| AP(13)      | 0,801          | 0,0001 | 2,222 | 0,005 | 0,004 | 1,929 | 0,013 |
| AP(16)      | 0,970          | 0,0001 | 2,719 | 0,002 | 0,001 | 0,794 | 0,005 |

Найкращою для побудови прогнозу буде модель AP(3):

$$y(k) = 0.012 + 1.559y(k-1) - 0.929y(k-2) + 0.305y(k-3) + e(k)$$

### 3.2 Прогнозування чисельності народонаселення України

#### 3.2.1 Застосування різних методів для прогнозування динаміки чисельності населення України

Цей підрозділ роботи присвячено прогнозуванню показника динаміки чисельності населення України різними методами. З існуючих методів побудови прогнозу дана програма використовує, зокрема, такі МНК; МГВА (чіткий; нечіткий). Крім того, додатково можна порахувати основні критерії якості прогнозів і вже на основі цих даних зробити висновок про те, прогноз яким методом є найкращим. Як і в попередніх підрозділах, для прогнозу динаміки чисельності народонаселення я використовував вибірку з 50 значень – кількість населення з 1991 по 2018 рік. Для навчання взято вибірку з 35-ти значень. Із можливих методів прогнозування я застосував МГВА

(чіткий та нечіткий). Результат роботи програми представлено в Додатку Д. Для зручності дані можна представити у вигляді графіка (Рисунок 3.9).

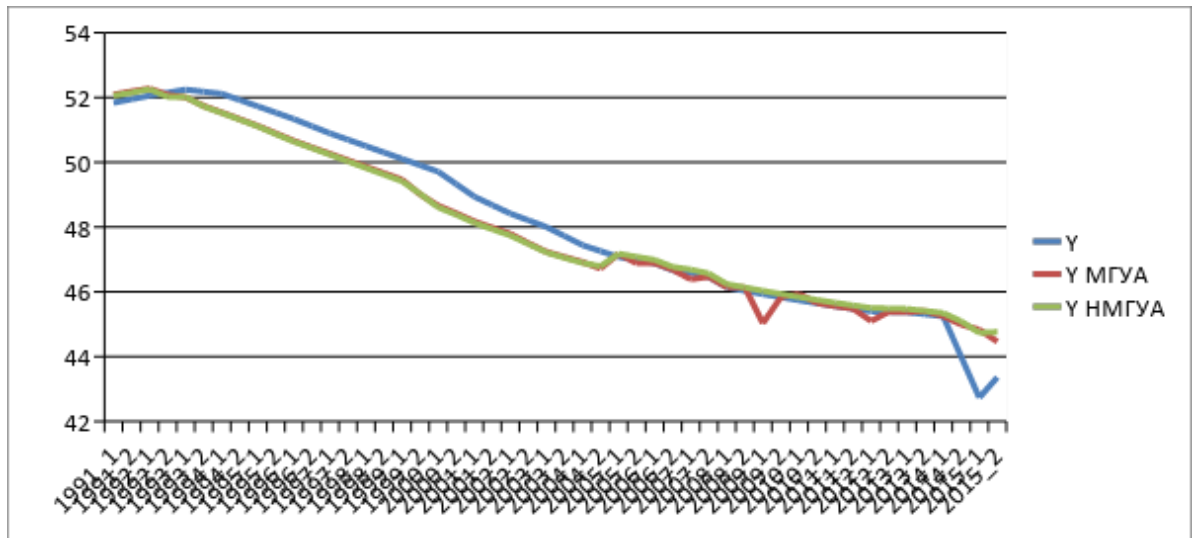


Рисунок 3.9 – Результати застосування різних методів для прогнозування динаміки чисельності народонаселення

Для вибору найкращого прогнозу, використаємо такі критерії якості прогнозу: середньоквадратична похибка (RSME); середня абсолютна похибка (MPE); середня абсолютна похибка в процентах (MAPE); коефіцієнт Тейла (U). Результати представлені в Таблиці 3.6.

Таблиця 3.6 – Критерії якості прогнозу динаміки чисельності народонаселення

|      | Y МГВА   | Y НМГВА  |
|------|----------|----------|
| RSME | 0.052654 | 0.063889 |
| ME   | 3.42E-05 | 0.024854 |
| MPE  | -4E-07   | 0.000502 |
| MAPE | 0.00081  | 0.001092 |
| U    | 0.000557 | 0.000676 |

|     |          |         |
|-----|----------|---------|
| U_M | 11.65345 | 4.43258 |
|-----|----------|---------|

Таким чином, найкращі результати прогнозу дає чіткий МГВА. Похибки прогнозу для нього, порівняно з іншими методами, досить невеликі.

### 3.2.2 Побудова середньострокового прогнозу на 5 років для населення України

Яких змін, пов'язаних з демографічною проблемою, нам слід очікувати в майбутньому? Зокрема, як буде розвиватися ситуація в нашій країні протягом наступних 5 років? Як вже зазначалося, для побудови прогнозів існує досить багато методів. Вже розглядалася можливість застосування деяких з них. Ми ж, для побудови середньострокового прогнозу на 5 років, використаємо метод різницевих рівнянь.

Вибір даного методу пояснюється тим, що структура РР така, що воно дозволяє виконувати прогнозування на один крок (по відношенню до теми роботи, це пів року) без додаткових перетворень. Тобто в праву частину необхідно підставити минулі значення змінних і обчислити оцінку прогнозу головної змінної в лівій частині. Але для того щоб знайти оцінку прогнозу на більше число кроків, необхідно застосувати деякі попередні перетворення РР.

Для побудови прогнозу динаміки чисельності населення України на 5 років використаємо модель АР(2):

$$y(k) = -0.181 + 1.217y(k-1) - 0.215y(k-2) + e(k)$$

Ця модель за своїми статистичними характеристиками є цілком адекватною випадковому процесу, що розглядається. Функція прогнозування на  $s$  кроків має вигляд:

$$E_k[y(k+s)] = a_0 + a_1 E_k[y(k+s-1)] + a_2 E_k[y(k+s-2)] + a_3 E_k[y(k+s-3)] + a_4 E_k[y(k+s-4)] + a_5 E_k[y(k+s-5)]$$

За цією формулою ми і будемо будувати прогноз. Значення  $y(k-1)$  та  $y(k)$  - чисельність населення України у 2017\_2 (2-ге півріччя) та 2018\_1 (1-ше півріччя) роках відповідно. Ці значення беруться з статистичних таблиць  $y(k)=42.422$   $y(k-1)=42.386$ . Слід окремо зауважити, що при застосуванні даного методу використовуються лише відомі сталі величини. В нашому випадку, це кількість населення за півріччя. Тому зростає достовірність такого прогнозу, і похибка зменшується.

Результати обчислень маємо наступні:

- 1)  $s=1: y(k+1)=-0.181+1.217*42.522-0.215*42.698=42.388$
- 2)  $s=2: y(k+2)=-0.181+1.217*42.388-0.215*42.698=42.264$
- 3)  $s=3: y(k+3)=-0.181+1.217*42.264-0.215*42.388=42.140$
- 4)  $s=4: y(k+4)=-0.181+1.217*42.140-0.215*42.264=42.017$
- 5)  $s=5: y(k+5)=-0.181+1.217*42.017-0.215*42.140=41.893$
- 6)  $s=6: y(k+6)=-0.181+1.217*41.893-0.215*42.017=41.770$
- 7)  $s=7: y(k+7)=-0.181+1.217*41.770-0.215*41.893=41.646$
- 8)  $s=8: y(k+8)=-0.181+1.217*41.646-0.215*41.770=41.521$
- 9)  $s=9: y(k+9)=-0.181+1.217*41.521-0.215*41.646=41.397$
- 10)  $s=10: y(k+10)=-0.181+1.217*41.397-0.215*41.521=41.272$

Отримані результати представимо у вигляді діаграми (Рисунок 3.10).

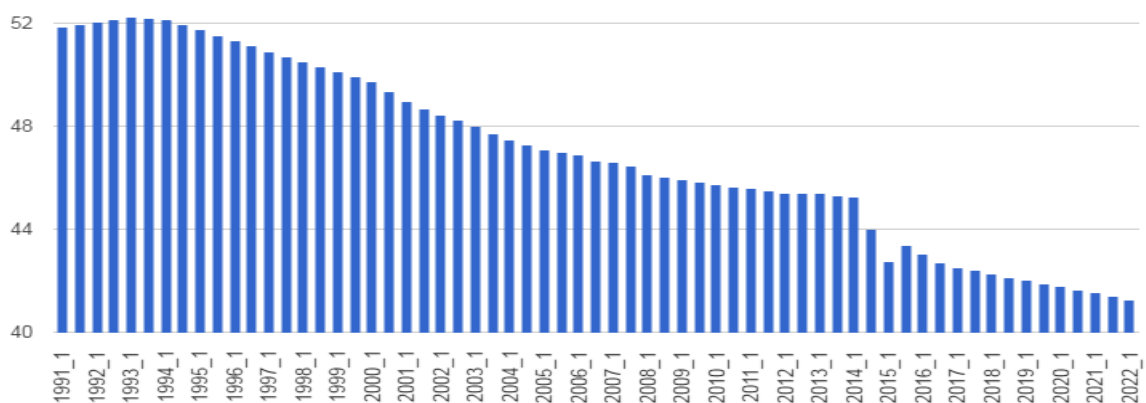


Рисунок 3.10 – Результати застосування РР для прогнозування чисельності населення України до 2023 року

Отже, в найближчі 5 років змін на краще в демографічній ситуації країни не передбачається. Чисельність населення за прогнозом поступово скорочується. Можливо, якщо будуть покращенні економічний, політичний, екологічний та соціальний стани країни, ситуація зміниться на краще і можна буде очікувати позитивної динаміки – збільшення чисельності населення.

### 3.2.3 Побудова середньострокового прогнозу для населення України за допомогою тренду

Вхідними даними є вибірка з тридцяти чотирьох значень - чисельності всього населення (ALL) з 1991 по 2018pp та часовий ряд – тренд (K) (Рисунок 3.11).

|                    | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| C(1)               | 52.63038    | 0.160540              | 327.8332    | 0.0000 |
| C(2)               | -0.109196   | 0.021149              | -5.163161   | 0.0000 |
| C(3)               | -0.002596   | 0.000586              | -4.428656   | 0.0001 |
| R-squared          | 0.980221    | Mean dependent var    | 49.67460    |        |
| Adjusted R-squared | 0.978944    | S.D. dependent var    | 2.025143    |        |
| S.E. of regression | 0.293859    | Akaike info criterion | 0.472662    |        |
| Sum squared resid  | 2.676943    | Schwarz criterion     | 0.607341    |        |
| Log likelihood     | -5.035262   | Durbin-Watson stat    | 0.160902    |        |

Рисунок 3.11 – Результати роботи програми EViews

Отримана модель має такий вигляд  $ALL(K) = 52.63 - 0.109 * K - 0.0026 * K^2$

Здійснимо прогноз на 5 років за допомогою тренду. Результати обчислень маємо наступні:

1) 2018 рік:  $ALL(36) = 52.63 - 0.109 * K - 0.0026 * K^2 = 42.341$

2) 2019 рік:  $ALL(38) = 52.63 - 0.109 * K - 0.0026 * K^2 = 40.939$

3) 2020 рік:  $ALL(40) = 52.63 - 0.109 * K - 0.0026 * K^2 = 40.116$



4) 2021 рік:  $ALL(42) = 52.63 - 0.109 * K - 0.0026 * K^2 = 39.473$

5) 2022 рік:  $ALL(44) = 52.63 - 0.109 * K - 0.0026 * K^2 = 38.808$

Результати застосування тренду та прогнозування представлені на Рисунку 3.12.

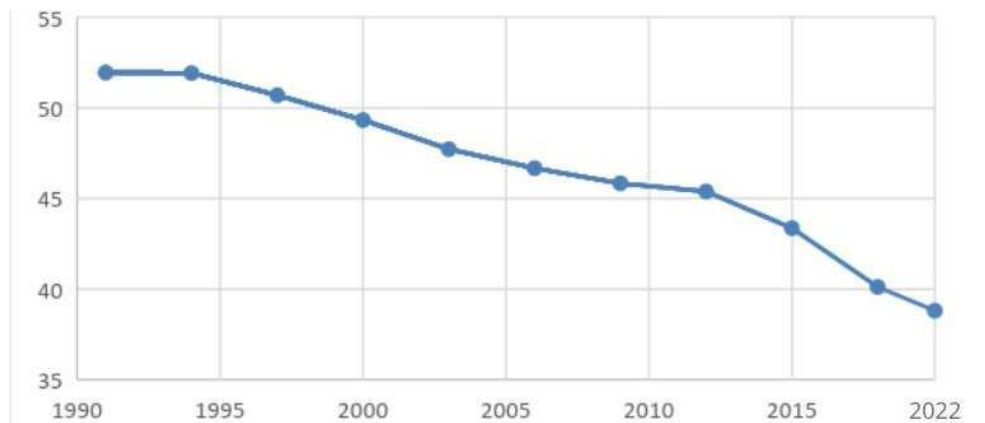


Рисунок 3.12 Результати застосування тренду для прогнозування чисельності населення України до 2022 року

3.2.4 Порівняння результатів застосування методу різницевого рівнянь та методу прогнозування за допомогою тренду

Порівняння критеріїв якості прогнозу для двох методів представлені в Таблиці 3.8.

Таблиця 3.8 – Критерії якості прогнозу методу РР та тренду

| Метод/Критерій | РР    | Тренд |
|----------------|-------|-------|
| $R^2$          | 0.999 | 0.98  |
| SSR            | 0.092 | 2.677 |
| DW             | 1.94  | 0.161 |
| СеКП           | 0.178 | 0.281 |

|      |        |        |
|------|--------|--------|
| САП  | 0.146  | 0.240  |
| САПП | 0.229  | 0.484  |
| U    | 0.0018 | 0.0028 |

З цих критеріїв видно, що прогнозування за допомогою методу різницевих рівнянь дає достовірний прогноз. Більш того, показники якості РР говорять про досить високу придатність методу та його адекватність. Зведені результати прогнозування двох методів продемонстровані на Рисунку 3.13.

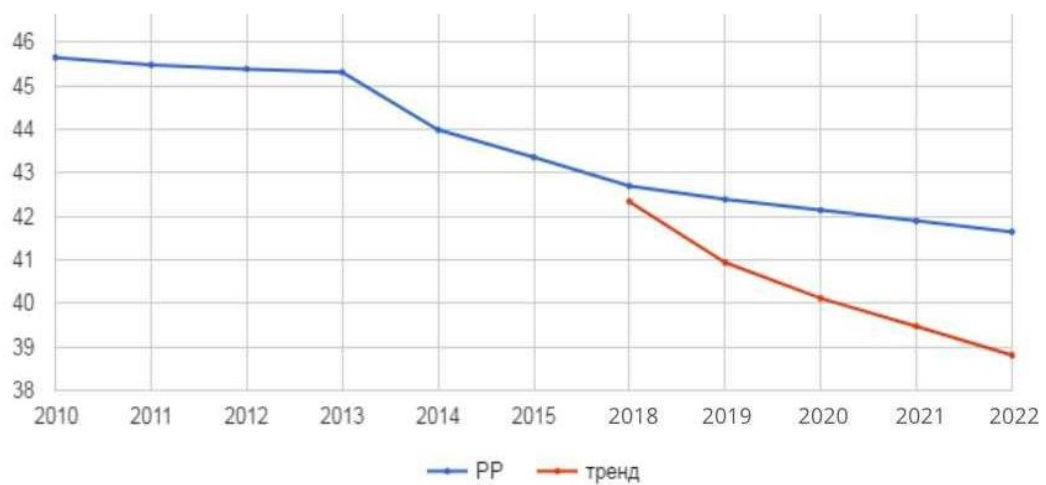


Рисунок. 3.13 – Результати застосування РР та методу за допомогою тренду для прогнозування чисельності населення України до 2023 року

Як вже було виявлено вище, метод різницевих рівнянь дає значно достовірний прогноз і до того ж він демонструє більш оптимістичний результат.

## Висновки

В Розділі 3 були побудові математичні моделі для прогнозування демографічних процесів в Україні. І був проведений прогноз за найбільш адекватними моделями.

Для роботи з побудови математичних моделей я користувався спеціалізованим пакетом Econometric Views 9.5.

Вхідними даними є п'ять вибірок з тридцяти чотирьох значень, що описують динаміку зміни чисельності всього населення (ALL), динаміку народжуваності (BIRTH), динаміку смертності (DEATH), динаміку зареєстрованих шлюбів (MARRIAGE) та розлучень (DIVORCE) з 1991 по 2018 рік.

На основі вхідних статистичних даних, виконано прогнозування методами чіткий та нечіткий МГВА. Були розраховані критерії якості прогнозів і проведено їх аналіз.

Для побудови прогнозу динаміки чисельності населення на найближчі 5 років в розділі застосовується метод різницевих рівнянь та прогнозування за допомогою тренду. Прогнозування за допомогою методу різницевих рівнянь дає більш достовірний прогноз. Більш того, показники якості РР говорять про досить високу придатність методу (моделі) та його адекватність.

В найближчі 5 років змін на краще в демографічній ситуації країни не передбачається. Чисельність населення за прогнозом поступово скорочується.

Можливо, якщо будуть покращенні економічний, політичний, екологічні та соціальний стани країни, ситуація зміниться на краще і можна буде очікувати збільшення чисельності населення або хоча б деякої стабілізації.

## РОЗДІЛ 4 СТАРТАП ПРОЕКТ

## 5.1 Опис ідеї проекту

Таблиця 5.1 – Опис ідеї стартап проекту

| Зміст ідеї  | Напрямки застосування  | Вигоди для користувача   |
|---|--|--|
| Система прийняття рішень в сфері демографічних процесів | Надання допомоги ОПР у прийнятті рішень в сфері демографічних процесів | Отримання допомоги у прийнятті рішень в сфері демографічних процесів |

Таблиця 5.2 – Визначення сильних, слабких та нейтральних характеристик ідеї проекту

| № п/п | Техніко-економічні характеристики ідеї | (потенційні) товари/концепції конкурентів |          |             | W (слабка сторона) | N (нейтральна сторона) | S (сильна сторона) |
|-------|--|---|----------|-------------|--------------------|------------------------|--------------------|
|       |  | Мій проект                                | СППР SAS | СППР Oracle |                    |                        |                    |
| 1.    | Ціна                                   | Низька                                    | Висока   | Висока      |                    |                        | +                  |
| 2.    | Ефективність                           | Висока                                    | Висока   | Висока      |                    | +                      |                    |
| 3.    | Функціонал                             | Вузький                                   | Широкий  | Широкій     | +                  |                        |                    |

## 5.2 Технологічний аудит ідеї проекту

Таблиця 5.3 – Технологічна здійсненність ідеї проекту

| № п/п   | Ідея проекту  | Технології її реалізації | Наявність технологій | Доступність технологій |
|---|---|--------------------------|----------------------|------------------------|
| 1.  | Розробка ПЗ, а саме СППР в сфері демографічних процесів | C++                      | Наявна               | Доступна               |
| 2.  |   | Python                   | Наявна               | Недоступна             |
| 3.  |   | Eviews                   | Наявна               | Доступна               |
| Обрана технологія реалізації ідеї проекту: Eviews |   |                          |                      |                        |

## 5.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап проекту

Таблиця 5.4 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап проекту

| № п/п | Показники стану ринку (найменування)                     | Характеристика                    |
|-------|--|-----------------------------------|
| 1.    | Кількість головних гравців, од                           | 2                                 |
| 2.    | Загальний обсяг продаж, грн/ум.од                        | 7500000                           |
| 3.    | Динаміка ринку (якісна оцінка)                           | Зростає                           |
| 4.    | Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень) | Наявність великих гравців у сфері |

Таблиця 5.4 – продовження

|    |   |       |
|----|---|-------|
| 5. | Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації     | Немає |
| 6. | Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), % | 30%   |

Таблиця 5.5 – Характеристика потенційних клієнтів стартап проекту

| № п/п | Потреба, що формує ринок                            | Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)                     | Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів | Вимоги споживачів до товару                    |
|-------|---|--|---|--|
| 1.    | Потреба в автоматизованій СППР у сфері інвестування | Фізичні особи та невеликі компанії, зацікавлені в інвестуванні | Необхідність невисокої ціни продукту                              | Вимоги до точності та ефективності роботи СППР |
| 2.    |   | Великі компанії, зацікавлені в інвестуванні                    | -   |  |

Таблиця 5.6 – Фактори загроз

| № п/п | Фактор        | Зміст загрози   | Можлива реакція компанії     |
|-------|---------------|---|------------------------------|
| 1.    | Новий продукт | Потенційні користувачі з підозрою ставляться до нових продуктів | Поширення рекламної кампанії |

Таблиця 5.7 – Фактори можливостей

| № п/п | Фактор                        | Зміст можливості  | Можлива реакція компанії  |
|-------|-------------------------------|---|---|
| 1.    | Потреба у недорогому продукті | Потреба фізичних осіб та невеликих компаній у недорогій СППР в сфері демографічних процесів | Задоволення потреба фізичних осіб та невеликих компаній у недорогій СППР в сфері демографічних процесів |

Таблиця 5.8 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

| Особливості конкурентного середовища                | В чому проявляється дана характеристика                              | Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною) |
|---|--|--|
| 1. Тип конкуренції: олігополія                      | У сфері домінує невелика кількість компаній                          | Поширення рекламної кампанії   |
| 2. За рівнем конкурентної боротьби: міжнаціональний | Наявна міжнаціональна конкуренція                                    | -  |
| 3. Конкуренція за видами товарів: товарно-видова    | Наявна конкуренція між схожими продуктами                            | -  |
| 4. За характером конкурентних переваг: нецінова     | Наявна конкуренція завдяки підвищенню якості та надійності продукції | Можливість вийти на ринок з недорогим продуктом  |
| 5. За інтенсивністю: не марочна                     | Наявна конкуренція, де роль торгової марки незначна                  | -  |

Таблиця 5.10 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

|                  |   |  |  |  |                  |
|------------------|---|--|--|--|------------------|
| Складові аналізу | Прямі конкуренти в галузі                                     | Потенційні конкуренти                                      | Постачальники                                    | Клієнти  | Товари-замінники |
|                  | СППР SAS<br>СППР Oracle                                       | Доступ до каналів розподілу                                | -  | Розмір закупівель, контроль якості                 | Ціна             |
| Висновки         | Висока інтенсивність конкурентної боротьби з боку конкурентів | Є можливості входу в ринок. Потенційних конкурентів немає. | Постачальники не диктують умови роботи на ринку. | Клієнти диктують високі критерії якості продуктів. | -                |

Таблиця 5.11 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

| № п/п | Фактор конкурентоспроможності | Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)                               |
|-------|-------------------------------|---|
| 1.    | Ціна                          | Ціна запропонованого продукту значно нижче ніж ціни конкуруючих, це значно поширює потенційну клієнтську базу                     |
| 2.    | Ефективність                  | Результати використання продукту в умовах стохастичної невизначеності є сумірними або кращими за результати конкуруючих продуктів |
| 3.    | Поріг входження               | Так як у сфері тип конкуренції є олігополією, достатньо складно вивести новий невідомий невеликий продукт на ринок                |

Таблиця 5.12 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін проекту



| №<br>п/п | Фактор<br>конкурентоспроможнос<br>ті | Бали<br>1-20 | Рейтинг товарів-конкурентів у<br>порівнянні з запропонованою СППР |    |    |   |    |    |    |
|----------|--------------------------------------|--------------|---|----|----|---|----|----|----|
|          |                                      |              | -3  | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 |
| 1.       | Ціна                                 | 15           | +   |    |    |   |    |    |    |
| 2.       | Ефективність                         | 18           |   |    | +  |   |    |    |    |
| 3.       | Поріг входження                      | 10           |   |    |    |   |    |    | +  |

Таблиця 5.13 – SWOT аналіз стартап проекту

|   |   |
|---|---|
| Сильні сторони:<br>Ціна продукту<br>Ефективність продукту   | Слабкі сторони:<br>Невідомість продукту   |
| Можливості:<br>Охоплення аудиторії, що не<br>може дозволити дорогі<br>інтелектуальні комплекси<br>Впровадження інноваційних<br>методів підрахунку ризиків | Загрози:<br>Можлива незацікавленість продуктом<br>через його невідомість та невеликість |

Таблиця 5.14 – Альтернативи ринкового впровадження стартап проекту

| №<br>п/п | Альтернатива<br>(орієнтовний комплекс<br>заходів) ринкової<br>поведінки   | Ймовірність<br>отримання<br>ресурсів | Строки реалізації |
|----------|---|--------------------------------------|-------------------|
| 1.       | Розробка програмного<br>забезпечення та грамотна<br>маркетингова програма | Велика                               | 3-5 місяців       |

## 5.4 Розроблення ринкової стратегії проекту

Таблиця 5.15 – Вибір цільових груп потенційних клієнтів

| № п/п   | Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів                               | Готовність споживачів сприйняти продукт | Орієнтовний попит в межах цільової групи (сегменту) | Інтенсивність конкуренції в сегменті | Простота входу у сегмент |
|---|--|---|---|--------------------------------------|--------------------------|
| 1.  | Фізичні особи та невеликі компанії, зацікавлені в сфері демографічних процесів | Значна готовність                       | Високий   | Низька                               | Середня                  |
| 2.  | Великі компанії, зацікавлені в сфері демографічних процесів                    | Незначна готовність                     | Низький   | Висока                               | Висока                   |
| Які цільові групи обрано:<br>Фізичні особи та невеликі компанії, зацікавлені в сфері демографічних процесів |  |   |   |                                      |                          |

Таблиця 5.16 – Визначення базової стратегії розвитку

| №<br>п/п | Обрана<br>альтернатива<br>розвитку<br>проекту                                      | Стратегія<br>охоплення<br>ринку                 | Ключові<br>конкурентоспро-<br>мні позиції<br>відповідно до<br>обраної<br>альтернативи | Базова стратегія<br>розвитку |
|----------|--|---|---|------------------------------|
| 1.       | Розробка<br>програмного<br>забезпечення<br>та грамотна<br>маркетингова<br>програма | За рахунок<br>потреби в<br>дешевому<br>продукті | Ціна  | Стратегія<br>спеціалізації   |

Таблиця 5.17 – Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

| №<br>п/п | Чи є проект<br>«першопро-<br>хідцем» на<br>ринку? | Чи буде<br>компанія шукати<br>нових<br>споживачів, або<br>забирати<br>існуючих у<br>конкурентів? | Чи буде компанія<br>копіювати<br>основні<br>характеристики<br>товару<br>конкурента, і які? | Стратегія<br>конкурентної<br>поведінки       |
|----------|---|--|--|--|
| 1.       | Так   | Шукати нових<br>споживачів   | Буде розроблений<br>продукт зі<br>схожим<br>функціоналом,<br>але іншою<br>методологією     | Стратегія<br>заняття<br>конкурентної<br>ніші |

Таблиця 5.18 – Визначення стратегії позиціонування

| №<br>п/п | Вимоги до<br>товару<br>цільової<br>аудиторії   | Базова<br>стратегія<br>розвитку | Ключові<br>конкурентоспро-<br>можні позиції<br>власного стартап-<br>проекту | Вибір асоціацій,<br>які мають<br>сформува-<br>ти комплексну<br>позицію власного<br>проекту (три<br>ключових) |
|----------|--|---------------------------------|---|--|
| 1.       | Необхідність<br>невисокої<br>ціни<br>продукту,<br>точності та<br>ефективності<br>роботи СППР | Стратегія<br>спеціалізації      | Ціна та<br>ефективність   | Низька ціна<br>Висока<br>ефективність<br>Простота у<br>використанні  |

### 5.5 Розроблення маркетингової програми стартап проекту

Таблиця 5.19 – Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

| №<br>п/п | Потреба                              | Вигода<br>товару                  | Ключові переваги перед<br>конкурентами                          |
|----------|--------------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1.       | Потреба в<br>недорогому<br>продукті  | Пропонує<br>недорогий<br>продукт  | Ціна товару нижче ніж ціна товару<br>конкурентів                |
| 2.       | Потреба в<br>ефективному<br>продукті | Пропонує<br>ефективний<br>продукт | Ефективність товару вище ніж<br>ефективність товару конкурентів |

Таблиця 5.20 – Опис трьох рівнів моделі товару

|  |   |      |                |
|--|---|------|----------------|
| Рівні товару   | Сутність та складові  |      |                |
| I. Товар за задумом  | Недорога СППР в сфері демографічних процесів в умовах стохастичної невизначеності |      |                |
| II. Товар у реальному виконанні  | Властивості/характеристики  | М/Нм | Вр/Тх /Тл/Е/Ор |
|  | 1. Мультиплатформенність<br>2. Зручний інтуїтивний інтерфейс                      | -    | -              |
|  | Якість: стандарти ефективності  |      |                |
|  | Пакування: електронне розповсюдження  |      |                |
|  | Марка: IDAV InvestStoch   |      |                |
| III. Товар із підкріпленням  | До продажу  |      |                |
|  | Після продажу технічна підтримка  |      |                |
| За рахунок чого потенційний товар буде захищено від копіювання: захист інтелектуальної власності |   |      |                |

Таблиця 5.21 – Визначення меж встановлення ціни

| № п/п | Рівень цін на товари-замінники | Рівень цін на товари - аналоги | Рівень доходів цільової групи споживачів | Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар/послугу |
|-------|--------------------------------|--------------------------------|--|---|
| 1.    | -                              | 7500000-54000000 грн.          | 25000+ грн.                              | 8000-18000 грн.   |

Таблиця 5.22 – Формування системи збуту

| №<br>п/п | Специфіка<br>закупівельної<br>поведінки<br>цільових<br>клієнтів | Функції збуту,<br>які має<br>виконувати<br>постачальник<br>товару | Глибина<br>каналу<br>збуту | Оптимальна<br>система збуту  |
|----------|---|---|----------------------------|------------------------------|
| 1.       | Закупівля через<br>інтернет                                     | Підтримка<br>нормального<br>функціонування<br>сайту               | 0                          | Електронне<br>розповсюдження |

Таблиця 5.23 – Концепція маркетингових комунікацій

| №<br>п/п | Специфіка<br>поведінки<br>цільових<br>клієнтів        | Канали<br>комуніка<br>цій<br>цільових<br>клієнтів | Ключові<br>позиції,<br>обрані для<br>позиціонуван<br>ня             | Завдання<br>рекламного<br>повідомлення         | Концепція<br>рекламного<br>звернення |
|----------|---|---|---|--|--------------------------------------|
| 1.       | Потреба в<br>недорогому та<br>ефективному<br>продукті | Інтернет-<br>мережі                               | Низька ціна<br>Висока<br>ефективність<br>Простота у<br>використанні | Провести<br>якісну<br>маркетингову<br>кампанію | Донести<br>специфіку<br>продукту     |

## Висновки

Є можливість ринкової комерціалізації проекту (наявний попит, наявна динаміка ринку, наявна рентабельність роботи на ринку). Є перспективи впровадження з огляду на потенційні групи клієнтів, бар'єри входження, стан конкуренції, конкурентоспроможність проекту. Доцільно обрати альтернативу розробки програмного забезпечення та грамотної маркетингової програми для ринкової реалізації проекту. Подальша імплементація проекту є доцільною.

## ВИСНОВКИ

В демографічній ситуації спостерігається тенденція до зростання чисельності населення Землі. На сьогоднішній день вона складає 7,444 млрд. осіб. За оцінками ООН, щодня населення Землі збільшується на чверть мільйона, за рік ця цифра сягає 90 млн., тобто щороку чисельність збільшується на 0,7%.

На відміну від світових тенденцій, населення України продовжує скорочуватися. З часів останнього перепису населення 2001 року (тобто за останні 17 роки), чисельність жителів країни зменшилася більш ніж на дев'ять мільйонів чоловік. Від'ємне сальдо міграції, зниження тривалості життя і стрімке падіння народжуваності, війна на сході та анексія Криму, поширення ВІЛ/СНІД та соціальних хвороб стали характерними ознаками демографічних процесів останніх десятиліть і дають підстави кваліфікувати їх як ознаки демографічної кризи.

Було розглянуто сучасні методи побудови математичних моделей, насамперед диференціальні та різницеві рівняння, які стали особливо популярними в останні двадцять років. Також наведені різні методи прогнозування та апроксимації.

Завдяки простоті структури й наявності багатьох надійних методів оцінювання параметрів, різницеві рівняння (РР) широко застосовують при моделюванні процесів у техніці, економетриці, біології та інших науках. РР застосовуються для описання динаміки чисельності населення України та побудови функцій короткострокового і середньострокового прогнозування. Також я застосувала чіткий та нечіткий МГВА.

Для побудови прогнозу динаміки чисельності населення на найближчі 5 років в розділі застосовується метод різницевих рівнянь та прогнозування за допомогою тренду. Прогнозування за допомогою методу різницевих



рівнянь дає достовірний прогноз. Більш того, показники якості РР говорять про досить високу придатність методу (моделі) та його адекватність.

В найближчі 5 років змін на краще в демографічній ситуації країни не передбачається. Чисельність населення за прогнозом поступово скорочується.

Можливо, якщо будуть покращенні економічний, політичний, екологічні та соціальний стани країни, ситуація зміниться на краще і можна буде очікувати збільшення чисельності населення або хоча б деякої стабілізації.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Капіца С. П. Общая теория роста населения Земли / С. П. Капіца – М.: ММВБ, 2009. - 120 с.
2. Капіца С. П. Феноменологическая теория роста населения Земли / С. П. Капіца – М.: Наука, 1996, - 80 с.
3. Населення України, 2015 рік : демогр. Щорічник / Держ. ком. статистики України, Упр. статистики населення ; Л. М. Стельмах (відп. за вип.). – К. : Консультант, 2015. – 466 с.
4. Борисов В. А. Демографический анализ / Борисов В. А., Синельников А.Б. - М.: НИИ семьи, 1996. -66 с.
5. Полянська-Василенко Н. В. Історія України / Н. В. Полянська-Василенко – К.: Либідь, 1995.– 588 с.
6. Розподіл постійного населення України за статтю та віком на 1 січня 2016 року [Електронний ресурс]: Державна служба статистики – К., 2016. – Режим доступу: [http:// database.ukrcensus.gov.ua PXWEB2007/ ukr/ news/ op\\_popul.asp](http://database.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007/ukr/news/op_popul.asp)
7. Міграційний рух населення [Електронний ресурс]: Державна служба статистики – К., 2016. – Режим доступу: [http://database.ukrcensus.gov.ua /PXWEB2007/ukr/news/op\\_migr.asp](http://database.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007/ukr/news/op_migr.asp)
8. Формування приросту (скорочення) чисельності наявного населення та показники природного руху населення в Україні [Електронний ресурс]: Державна служба статистики – К., 2016. – Режим доступу: [http://database.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007/ukr/news/op\\_n\\_mov.asp](http://database.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007/ukr/news/op_n_mov.asp)
9. Бідюк П.І. Часові ряди: моделювання і прогнозування / П. І. Бідюк, О. І. Савенков, І. В. Баклан – К.: ЕКМО, 2003. – 144 с.
- 10.Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон – М.: Мир, 1976. – 755 с.
- 11.Лук'яненко Г. Г. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навчальний

- посібник / Г. Г. Лук'яненко, Ю. О.Городніченко – К.: Літера ЛТД, 2002 . – 352 с.
12. Lindley D.V. Making Decisions / Lindley D.V. – New York:Wiley, 2004. – 540 p.
13. Бидюк П. І. Системні дослідження та інформаційні технології / П. І. Бидюк, І. В. Баклан. – К.: ЕКМО 2002, с. 131.

## Додаток А Динаміка чисельності населення

|      | Кількість наявного населення |              |            |
|------|------------------------------|--------------|------------|
|      | всього, тис.осіб             | у тому числі |            |
|      |                              | Міське       | Сільське   |
| 1991 | 51 944 400                   | 35 085 200   | 16 859 200 |
| 1992 | 52 056 600                   | 35 296 900   | 16 759 700 |
| 1993 | 52 244 100                   | 35 471 000   | 16 773 100 |
| 1994 | 52 114 400                   | 35 400 700   | 16 713 700 |
| 1995 | 51 728 400                   | 35 118 800   | 16 609 600 |
| 1996 | 51 297 100                   | 34 767 900   | 16 529 200 |
| 1997 | 50 818 400                   | 34 387 500   | 16 430 900 |
| 1998 | 50 370 800                   | 34 048 200   | 16 322 600 |
| 1999 | 49 918 100                   | 33 702 100   | 16 216 000 |
| 2000 | 49 429 800                   | 33 338 600   | 16 091 200 |
| 2001 | 48 923 200                   | 32 951 700   | 15 971 500 |
| 2002 | 48 457 102                   | 32 574 371   | 15 882 731 |
| 2003 | 48 003 463                   | 32 334 120   | 15 669 343 |
| 2004 | 47 622 434                   | 32 148 345   | 15 474 089 |
| 2005 | 47 280 817                   | 32 009 320   | 15 271 497 |
| 2006 | 46 929 525                   | 31 877 710   | 15 051 815 |
| 2007 | 46 646 046                   | 31 777 367   | 14 868 679 |
| 2008 | 46 372 664                   | 31 668 757   | 14 703 907 |
| 2009 | 46 143 714                   | 31 587 203   | 14 556 511 |
| 2010 | 45 962 947                   | 31 524 795   | 14 438 152 |
| 2011 | 45 778 534                   | 31 441 649   | 14 336 885 |
| 2012 | 45 633 637                   | 31 380 874   | 14 252 763 |
| 2013 | 45 553 047                   | 31 378 639   | 14 174 408 |
| 2014 | 45 426 249                   | 31 336 623   | 14 089 626 |
| 2015 | 42 929 298                   | 29 673 113   | 13 256 185 |
| 2016 | 42 760 516                   | 29 584 952   | 13 175 564 |
| 2017 | 42 584 542                   | 29 482 313   | 13 102 229 |

|      |            |            |            |
|------|------------|------------|------------|
| 2018 | 42 386 403 | 29 370 995 | 13 015 408 |
|------|------------|------------|------------|

### Додаток Б Динаміка демографічного розвитку населення

|      | Кількість народжених | Частка дітей народжених жінками, які не перебували у зареєстрованому шлюбі, % | Кількість померлих | Природний приріст населення | Міграція населення між Україною та іншими державами приріст населення, тис. Одиниць | Кількість зареєстрованих шлюбів, одиниць | Кількість зареєстрованих розлучень, одиниць |
|------|----------------------|---|--------------------|-----------------------------|---|--|---|
| 1995 | 492 861              | 13,2  | 792 587            | -299 726                    | -131,6  | 431 731                                  | 198 300                                     |
| 1996 | 467 211              | 13,6  | 776 717            | -309 506                    | -169,2  | 307 543                                  | 193 030                                     |
| 1997 | 442 581              | 15,2  | 754 151            | -311 570                    | -136,0  | 345 013                                  | 188 232                                     |
| 1998 | 419 238              | 16,2  | 719 954            | -300 716                    | -152,0  | 310 504                                  | 179 688                                     |
| 1999 | 389 208              | 17,4  | 739 170            | -349 962                    | -138,3  | 344 888                                  | 175 781                                     |
| 2000 | 385 126              | 17,3  | 758 082            | -372 956                    | -33,8   | 274 523                                  | 197 274                                     |
| 2001 | 408 589              | 18,0  | 745 952            | -369 474                    | -24,4   | 309 602                                  | 181 334                                     |
| 2002 | 427 259              | 19,0  | 754 911            | -364 223                    | -7,6  | 317 228                                  | 183 538                                     |
| 2003 | 426 086              | 19,9  | 765 408            | -356 819                    | 4,6   | 370 966                                  | 177 183                                     |
| 2004 | 460 368              | 20,4  | 761 261            | -334 002                    | 14,2  | 278 225                                  | 173 163                                     |
| 2005 | 472 657              | 21,4  | 781 961            | -355 875                    | 16,8  | 332 143                                  | 183 455                                     |
| 2006 | 510 589              | 21,1  | 758 092            | -297 724                    | 14,9  | 354 959                                  | 179 123                                     |
| 2007 | 512 525              | 21,4  | 762 877            | -290 220                    | 13,4  | 416 427                                  | 178 364                                     |
| 2008 | 497 689              | 20,9  | 754 460            | -243 871                    | 16,1  | 321 992                                  | 166 845                                     |
| 2009 | 502 595              | 21,2  | 706 739            | -194 214                    | 17,1  | 318 198                                  | 145 439                                     |
| 2010 | 520 705              | 21,9  | 698 235            | -200 546                    | 61,8  | 305 933                                  | 126 068                                     |

|      |         |      |         |          |       |         |         |
|------|---------|------|---------|----------|-------|---------|---------|
| 2011 | 503 657 | 21,9 | 664 588 | -161 993 | 31,9  | 355 880 | 182 490 |
| 2012 | 465 882 | 21,4 | 663 139 | -142 434 | 21,1  | 278 276 | 168 508 |
| 2013 | 411 781 | 22,1 | 662 368 | -158 711 | 9,3   | 304 232 | 164 939 |
| 2014 | 408 589 | 21,1 | 632 296 | -166 414 | -33,8 | 294 962 | 130 673 |
| 2015 | 427 259 | 20,6 | 594 796 | -183 015 | -24,2 | 299 038 | 129 373 |
| 2016 | 397 037 | 22,1 | 583 631 | -186 594 | -19,7 | 229 453 | 129 997 |
| 2017 | 363 987 | 19,7 | 574 123 | -210 136 | -20,1 | 249 522 | 128 734 |

### Додаток В Середня тривалість життя жінок і чоловіків

| Період, за який розраховані показники (роки) | Середня очікувана тривалість життя при народженні обидві статі, років | у тому числі |       |
|--|---|--------------|-------|
|  |   | Чоловіки     | Жінки |
| 1991 <sup>0</sup>                            | 69,56   | 64,62        | 74,21 |
| 1992 <sup>0</sup>                            | 68,97   | 63,81        | 73,98 |
| 1993 <sup>0</sup>                            | 68,29   | 63,16        | 73,35 |
| 1994 <sup>0</sup>                            | 67,66   | 62,39        | 72,95 |
| 1995 <sup>0</sup>                            | 66,79   | 61,22        | 72,54 |
| 1996 <sup>0</sup>                            | 67,08   | 61,52        | 72,80 |
| 1997 <sup>0</sup>                            | 67,66   | 62,23        | 73,19 |
| 1998 <sup>0</sup>                            | 68,50   | 63,17        | 73,84 |
| 1999 <sup>0</sup>                            | 68,07   | 62,62        | 73,61 |
| 2000 <sup>0</sup>                            | 67,72   | 62,10        | 73,53 |
| 2001   | 67,89   | 62,32        | 73,63 |
| 2002   | 68,32   | 62,70        | 74,13 |
| 2003   | 68,24   | 62,64        | 74,06 |
| 2004   | 68,22   | 62,60        | 74,05 |
| 2005   | 67,96   | 62,23        | 73,97 |
| 2006   | 68,10   | 62,38        | 74,06 |
| 2007   | 68,25   | 62,51        | 74,22 |
| 2008   | 68,27   | 62,51        | 74,28 |
| 2009   | 69,29   | 63,79        | 74,86 |

|      |       |       |       |
|------|-------|-------|-------|
| 2010 | 70,44 | 65,28 | 75,50 |
| 2011 | 71,02 | 65,98 | 75,88 |
| 2012 | 71,15 | 66,11 | 76,02 |
| 2013 | 71,37 | 66,34 | 76,22 |
| 2014 | 71,37 | 66,25 | 76,37 |
| 2015 | 71,38 | 66,37 | 76,25 |
| 2016 | 71,48 | 66,49 | 76,27 |
| 2017 | 71,43 | 66,52 | 76,38 |

**Додаток Г Результати застосування різних методів для прогнозування  
динаміки чисельності народонаселення**

| Y        | Y МГВА | Y НМГВА |
|----------|--------|---------|
| 51,8385  | 52,089 | 52,056  |
| 51,94756 | 52,189 | 52,148  |
| 52,05662 | 52,275 | 52,255  |
| 52,15039 | 52,083 | 52,019  |
| 52,24417 | 52,007 | 52,017  |
| 52,17929 | 51,74  | 51,723  |
| 52,11441 | 51,539 | 51,523  |
| 51,92141 | 51,331 | 51,316  |
| 51,7284  | 51,125 | 51,109  |
| 51,53128 | 50,892 | 50,869  |
| 51,33415 | 50,661 | 50,638  |
| 51,11383 | 50,459 | 50,44   |
| 50,89352 | 50,263 | 50,234  |
| 50,69673 | 50,062 | 50,029  |
| 50,49994 | 49,862 | 49,824  |
| 50,30281 | 49,663 | 49,62   |
| 50,10568 | 49,465 | 49,417  |
| 49,90826 | 49,008 | 49,024  |
| 49,71083 | 48,659 | 48,609  |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 49,32587 | 48,427   | 48,382   |
| 48,9409  | 48,176   | 48,132   |
| 48,67826 | 47,981   | 47,933   |
| 48,41563 | 47,793   | 47,74    |
| 48,20956 | 47,503   | 47,478   |
| 48,0035  | 47,235   | 47,217   |
| 47,72225 | 47,077   | 47,052   |
| 47,441   | 46,921   | 46,895   |
| 47,25815 | 46,72005 | 46,79075 |
| 47,0753  | 47,1753  | 47,1753  |
| 46,98083 | 46,88083 | 47,08083 |
| 46,88636 | 46,88636 | 46,98636 |
| 46,66765 | 46,68265 | 46,76765 |
| 46,58763 | 46,38763 | 46,68763 |
| 46,46574 | 46,46574 | 46,56574 |
| 46,13884 | 46,13884 | 46,23884 |
| 46,03422 | 46,14522 | 46,13422 |
| 45,92959 | 45,02959 | 46,02959 |
| 45,83435 | 45,83435 | 45,93435 |
| 45,7391  | 45,9391  | 45,8391  |
| 45,65085 | 45,65085 | 45,75085 |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 45,56259 | 45,55759 | 45,66259 |
| 45,48071 | 45,48171 | 45,58071 |
| 45,39882 | 45,09882 | 45,49882 |
| 45,38576 | 45,38576 | 45,48576 |
| 45,3727  | 45,3727  | 45,4727  |
| 45,3093  | 45,4093  | 45,4093  |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 45,2459  | 45,2459  | 45,3459  |
| 43,98947 | 44,98947 | 45,08947 |
| 42,73304 | 44,83304 | 44,73304 |
| 43,36125 | 44,46125 | 44,76125 |